UNIVERZITET U NIŠU
TEHNOLOŠKI FAKULTET U LESKOVCU

ELEKTROTEHNIKA

2020/2021

Predavanja:
Sreten Stojanović

Računske vežbe:
Miloš Stevanović

Laboratorijske vežbe:
Miloš Stevanović

ISPIT	AKTIVNOSTI	POENI	NAPOMENA
Predispitne obaveze	predavanja	5	**min 30**
	praktična nastava	15	
	kolokvijumi	50	
Završni deo ispita	**test provere znanja**	**30**	

Poeni	Ocene
51-60	**6**
61-70	**7**
71-80	**8**
81-90	**9**
91-100	**10**

LITERATURA

Predavanja:	1. S. Stojanović, Elektrotehnika, PDF Prezentacija predavanja, 2013. 2. D. Mitić, “Elektrotehnika I, II”, Petrograf, Niš, 2007, 2008. 3. M. Cvetković, Elektrotehnika, Tehnološki fakultet, Leskovac, 1990.
Vežbe (računske):	4. D. Mitić, Elektrotehnika I, II u obliku metodičke zbirke zadataka”, Petrograf, Niš, 2007, 2008. 5. Đ. Vukić, Zbirka ispitnih zadataka iz elektrotehnike, Poljoprivredni fakultet Beograd, 2003.
Vežbe (laborat.):	6. I. Mladenović, S. Stojanović: Elektrotehnika sa elektronikom, praktikum za laboratorijske vežbe, Tehnološki fakultet, Leskovac, 2003.

Sadržaj predmeta:

1. Elektrostatika
2. Elektrokinetika
3. Magnetizam
4. Naizmenične struje

ELEKTROSTATIKA

- Elektrostatika je naučna oblast koja proučava:
  - naelektrisana u stanju mirovanja,
  - raspored naelektrisanja na telima,
  - uzajamno dejstvo naelektrisanih tela (električne sile),
  - električno polje koje stvaraju naelektrisana tela,
  - pojave vezane za električno polje

1 UVOD

1.1 NAELEKTRISANJE ELEMENTARNIH ČESTICA

- Naelektrisanje je osnovno svojstvo subatomskih čestica (elektrona, protona) kojim se odlikuju elektromagnetne interakcije.

  Oznaka za naelektrisanje tela: Q

- Elektron je čestica koja nosi elementarno negativno naelektrisanje.

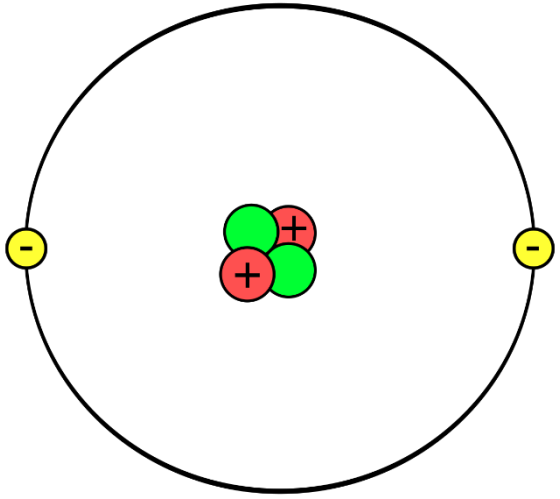
  $Q = -e$, gde je e elementarna (najmanja poznata) količina naelektrisanja

- Proton je čestica koja nosi elementarno pozitivno naelektrisanje.

  $Q = e$

- Jedinica naelektrisanja je kulon C:

  $1\,C = 6.241506 \cdot 10^{18} e$ ili $e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$



Napomena: 1C je veoma velika količina naelektr.
Manje jedinice: 1mC, 1μC, 1nC, 1pC

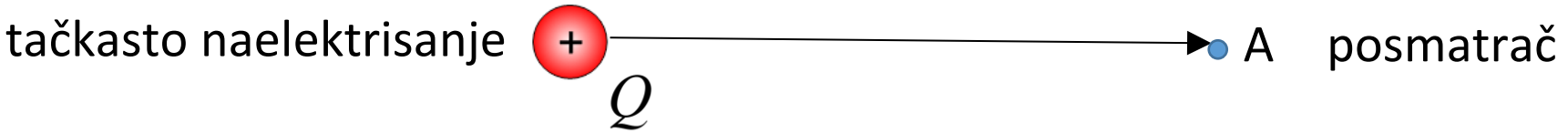
1.1.1 NAELEKTRISANJE TELA

Naelektrisanje tela jednako je algebarskom zbiru naelektrisanja svih njegovih čestica.

$$Q = \sum \pm e = \pm Ne,$$

N - razlika između broja pozitivnih i negativnih elementarnih naelektrisanja u telu.

Definicija. Tačkasto naelektrisanje je naelektrisano telo čije su dimenzije mnogo manje od rastojanja do drugih tela ili do tačke u kojoj se nalazi posmatrač.



ELEKTROSTATIKA proučava naelektrisana tela koja se nalaze u mirovanju.

Zakon o održanju elektriciteta:

U zatvorenom sistemu, ukupna količina naelektrisanja uvek ostaje ista.

Naelektrisanja se ne mogu stvoriti, već samo razdvojiti.

1.1.2 RASPODELA NAELEKTRISANJA NA TELIMA

LINIJSKA (PODUŽNA) RASPODELA NAELEKTRISANJA

Posmatramo telo u obliku tanke niti dužine l koje je naelektrisano po dužini ukupnom količinom naelektrisanja Q.

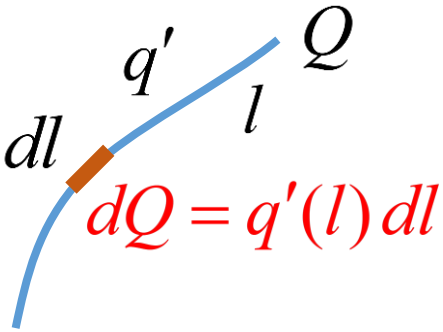
Podužna gustina naelektrisanja q' niti koja je ravnomerno naelektrisana po dužini *l*:

$$\boxed{q' = \frac{Q}{l}} \quad [\mathrm{C/m}] \quad \Rightarrow \quad \text{Ukupna količina naelektrisanja na } l\text{:} \quad Q = q'\,l$$

Podužna gustina naelektrisanja q' niti koja je neravnomerno naelektrisana po dužini *l*:

$$\boxed{q' = \frac{dQ}{dl}} \quad \Rightarrow \quad dQ = q'\,dl$$

Ukupna količina naelektrisanja na *l*: $\boxed{Q = \int_l dQ = \int_l q'dl}$



POVRŠINSKA RASPODELA NAELEKTRISANJA

Posmatramo telo površine S koje je naelektrisano po površini ukupnom količinom naelektrisanja Q.

Površinska gustina naelektrisanja σ tela koje je ravnomerno naelektrisano po površini S:

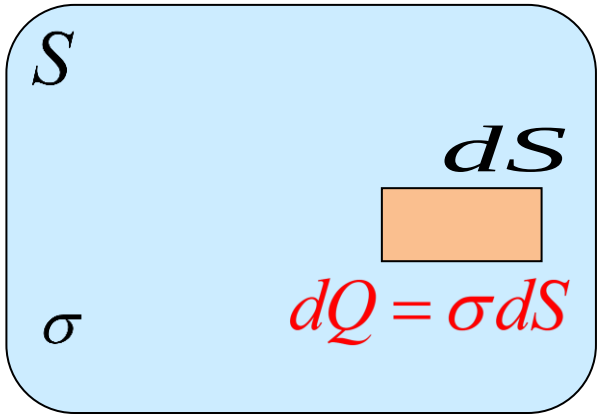
$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{S}} \left[\mathrm{C/m^2}\right] \Rightarrow$$ Ukupna količina naelektrisanja na S: $Q = \sigma S$

Površinska gustina naelektrisanja σ tela koje je neravnomerno naelektrisano po površini S:

$$\boxed{\sigma = \frac{dQ}{dS}} \Rightarrow dQ = \sigma dS$$

Ukupna količina naelektrisanja na S:

$$\boxed{Q = \int_S dQ = \int_S \sigma dS}$$



ZAPREMINSKA RASPODELA NAELEKTRISANJA

Posmatramo telo zapremine V koje je naelektrisano po zapremini ukupnom količinom naelektrisanja Q.

Zapreminska gustina naelektrisanja ρ tela koje je ravnomerno naelektrisano po zapremini V:

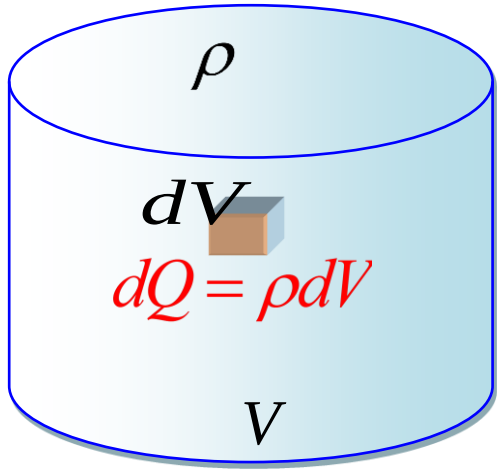
$$\rho = \frac{Q}{V}\left[\mathrm{C/m^3}\right] \quad \Rightarrow \text{ Ukupna količina naelektrisanja u V: } Q = \rho V$$

Zapreminska gustina naelektrisanja ρ tela koje je neravnomerno naelektrisano po zapremini V:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \Rightarrow \quad dQ = \rho dV$$

Ukupna količina naelektrisanja u V:

$$Q = \int_V dQ = \int_V \rho dV$$



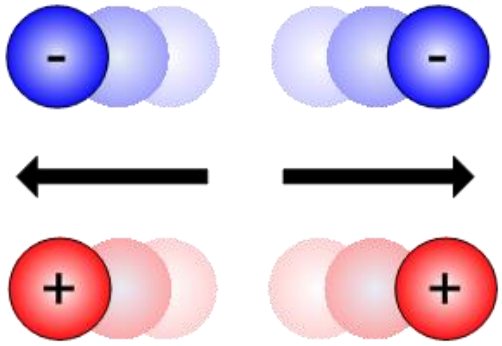
2 MEĐUSOBNO DELOVANJE NAELEKTRISANIH TELA

Eksperimentalno je pokazano da između svaka dva naelektrisanja (naelektrisane čestice, naelektrisana tela) postoji sila međusobne interakcije.

Ustanovljeno je da:

- pravac sile leži duž prave koja spaja naelektrisanja,
- intenzitet sile zavisi od međusobnog rastojanja naelektrisanih teka, kao i sredine u kojoj se tela nalaze.
- smer sile zavisi od predznaka naelektrisanja tela (može biti privlačna ili odbojna).

Sila je odbojna ako su naelektrisana tela istog predznaka, inače je privlačna.



2.1.1 KULONOV ZAKON

U homogenoj sredini (koja u svim tačkama ima iste karakteristike) intenzitet sile koja deluje između dva tačkasta naelektrisana iznosi:

$$F = k\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad [N]$$ (intenzitet sile)

F - intenzitet sile, Q_1, Q_2 - količine naelektrisanja tela

r - rastojanje između tela, k - konstanta proporcionalnosti sredine

Konstanta proporcionalnosti u vakumu iznosi $k_0 = 9\cdot 10^9 \left[Nm^2/C^2 \right]$.

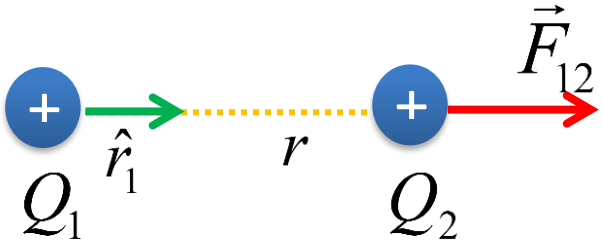
Ova konstanta je povezana sa dielektričnom konstantom sredine ε :

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad [N]$$

Za vakum dielektrična konstanta sredine iznosi:

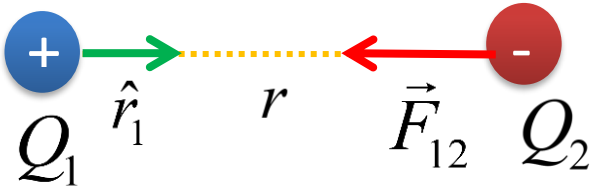
$$\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12} \left[C^2/Nm^2 \right]$$

VEKTORSKI OBLIK KULONOVOG ZAKONA



1. Dejstvo Q_1 na Q_2: $\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\hat{r}_1$

$\vec{F}_{12}$ - vektor sile kojim prvo naelektrisanje Q_1 deluje na drugo naelektrisanje Q_2,



r - rastojanje između naelektrisanja Q_1 i Q_2,

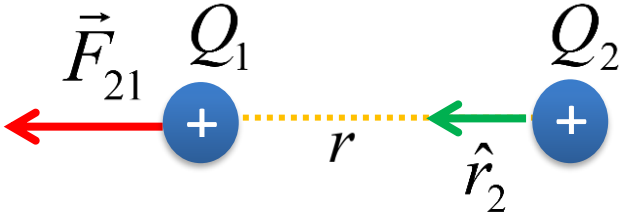
$\hat{r}_1$ - jedinični vektor (ort) koji polazi iz Q_1 i gleda na Q_2

Algebarska vrednost sile: $F_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ (intenzitet sile sa predznakom)

Za $Q_1 Q_2 > 0 \Rightarrow F_{12} > 0 \Rightarrow \vec{F}_{12}$ ima smer orta $\hat{r}_1 \Rightarrow$ odbojna sila

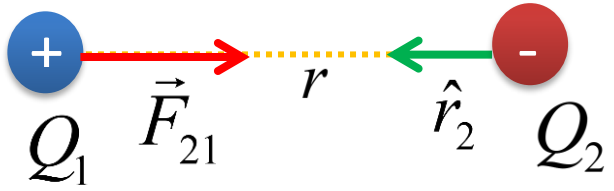
Za $Q_1 Q_2 < 0 \Rightarrow F_{12} < 0 \Rightarrow \vec{F}_{12}$ ima suprotni smer orta $\hat{r}_1 \Rightarrow$ privlačna sila

2. Dejstvo Q_2 na Q_1: $\vec{F}_{21} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\cdot\hat{r}_2$



$\vec{F}_{21}$ - vektor sile kojim drugo naelektrisanje Q_2 deluje na prvo naelektrisanje Q_1,

$\hat{r}_2$ - jedinični vektor koji polazi iz Q_2 i gleda na Q_1



Algebarska vrednost sile: $F_{21} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

(intenzitet sile sa predznakom)

Za $Q_1 Q_2 > 0 \Rightarrow F_{21} > 0 \Rightarrow \vec{F}_{21}$ ima smer orta $\hat{r}_2 \Rightarrow$ odbojna sila

Za $Q_1 Q_2 < 0 \Rightarrow F_{21} < 0 \Rightarrow \vec{F}_{21}$ ima suprotni smer orta $\hat{r}_2 \Rightarrow$ privlačna sila

3. Zaključak: Kako je $\hat{r}_1 = -\hat{r}_2 \Rightarrow \vec{F}_{21} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\cdot(-\hat{r}_1) = -\vec{F}_{12}$

Važi III Njutnov zakon - zakon akcije i reakcije!

TEOREMA SUPERPOZICIJE

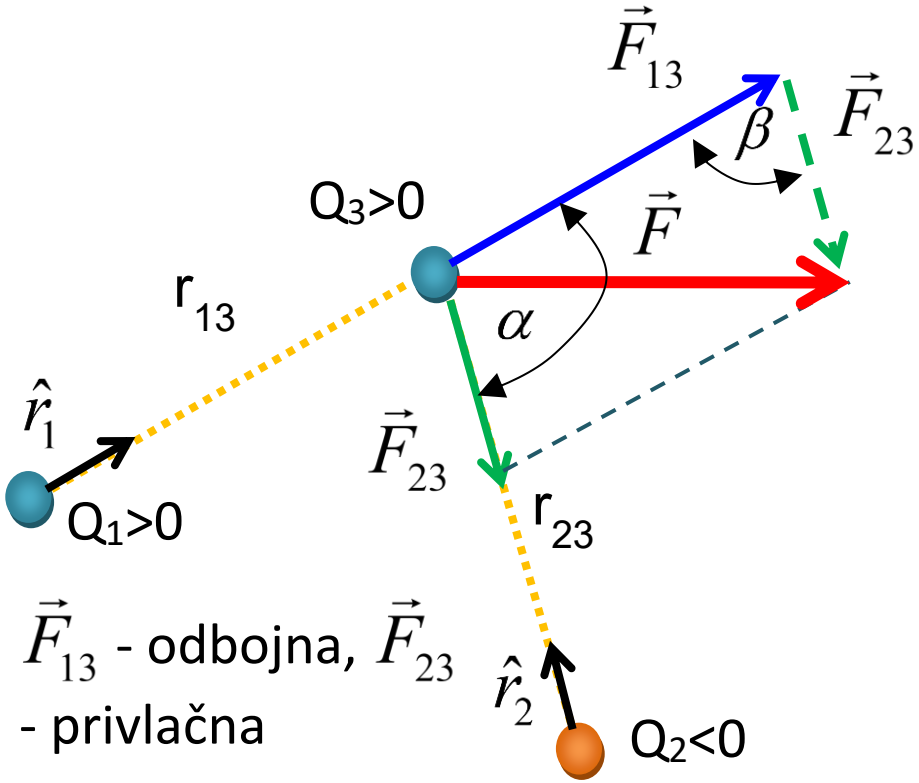
Rezultujuća sila kojom *n* tačkastih naelektrisanja deluju na dato tačkasto naelektrisanje u njihovoj okolini jednaka je vektorskom zbiru svih električnih sila kojima pojedinačna naelektrisanja deluju na dato naelektrisanje:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Primer. Rezultujuća sila na Q_3?

$$\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$F_{13} = k\frac{|Q_1||Q_3|}{r_{13}^2}, \quad F_{23} = k\frac{|Q_2||Q_3|}{r_{23}^2}$$



Kosinusna teorema:

$$F^2 = F_{13}^2 + F_{23}^2 - 2F_{13}F_{23}\cos(\underbrace{180-\alpha}_{\beta}) = F_{13}^2 + F_{23}^2 + 2F_{13}F_{23}\cos\alpha$$

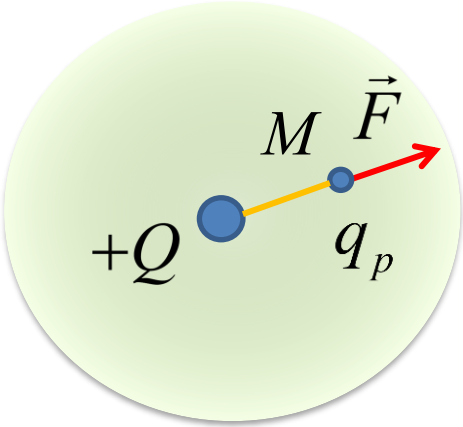
2.2 ELEKTROSTATIČKO POLJE

Elektrostatičko polje je posebno fizičko stanje prostora u okolini nepokretnog naelektrisanog tela koje se vidno manifestuje dejstvom električne sile na naelektrisanje uneto u to polje.

JAČINE ELEKTROSTATIČKOG POLJA

Osnovna karakteristika elektrostatičkog polja jeste jačina elektrostatičkog polja koja se obeležava sa $\vec{E}$. To je vektorska veličina.

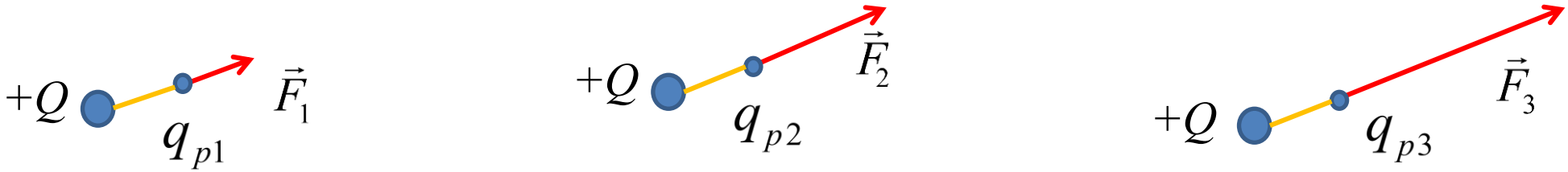
Jačina elektrostatičkog polja $\vec{E}$ nekog naelektrisanja Q u posmatranoj tački *M* definiše se preko Kulonove sile $\vec{F}$ kojom naelektrisanje Q deluje na probno naelektrisanje postavljeno u toj tački i količine probnog naelektrisanja q_p .



Probno naelektrisanje je tačkasto telo naelektrisano malom količinom pozitivnog naelektrisanja $(q_p > 0)$ tako da ono svojim električnim poljem ne utiče na ispitivano električno polje.

Eksperiment

Probno naelektrisanje q_p postavlja se u okolini tačkastog naelektrisanja Q. Količina naelektrisanja q_p se postepeno povećava ($q_{p3} > q_{p2} > q_{p1}$), a njegov položaj ostaje isti. Meri se Kulonova sila između naelektrisanja Q i q_p.



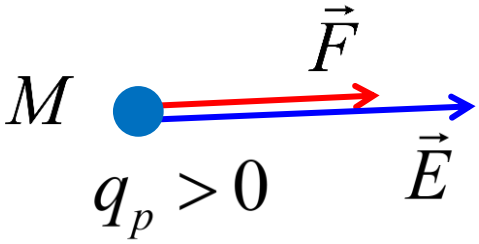
Rezultat merenja pokazuje:

- sa povećanjem q_p intenzitet sile $\vec{F}$ se povećava, dok su pravac i smer nepromenjeni.
- količnik sile $\vec{F}$ koja deluje na probno naelektrisanje i količine probnog naelektrisanja q_p ostaje konstantan:

$$\frac{\vec{F}_1}{q_{p1}} = \frac{\vec{F}_2}{q_{p2}} = \frac{\vec{F}_3}{q_{p3}} = \cdots = \overrightarrow{const.} = \vec{E} \quad , \quad \vec{E} \text{ - jačina elektrostatičkog polja}$$

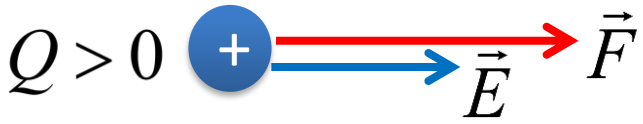
Jačine elektrostatičkog polja $\vec{E}$ u posmatranoj tački *M* prostora jednaka je količniku Kulonove sile $\vec{F}$ kojom elektrostatičko polje deluje na probno naelektrisanje q_p postavljeno u toj tački i količine probnog naelektrisanja q_p. $\vec{E}$ ima pravac i smer sile $\vec{F}$ koja deluje na q_p.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_p} \qquad \left[\frac{N}{C}\right]$$

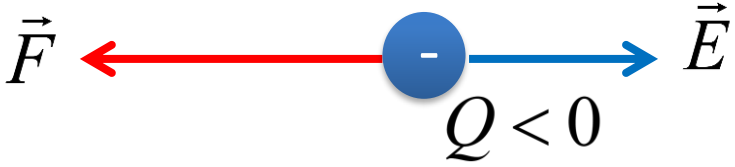


Sila $\vec{F}$ kojom elektrostatičko polje $\vec{E}$ deluje na neko tačkasto telo naelektrisano količinom naelektrisanja Q iznosi:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \text{razlikujemo dva slučaja:} \quad Q > 0 \quad \text{i} \quad Q < 0$$



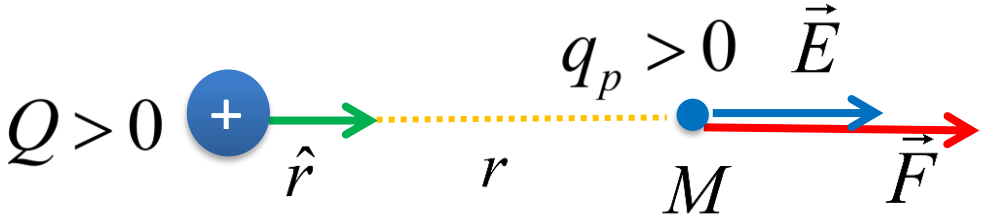
$\vec{E}$ i $\vec{F}$ su istog smera



$\vec{E}$ i $\vec{F}$ su suprotnog smera

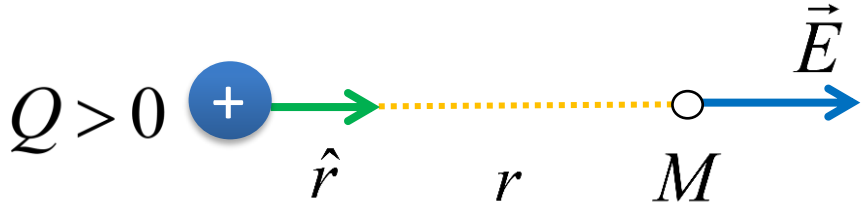
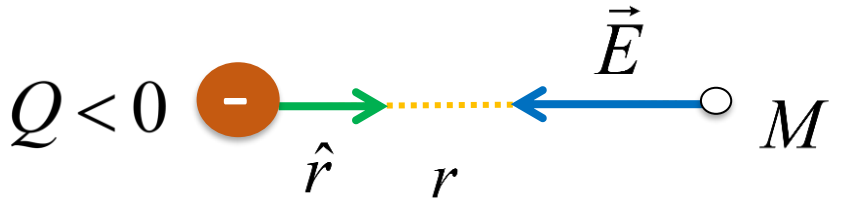
2.2.1 ELEKTROSTATIČKO POLJE USAMLJENOG TAČKASTOG NAELEKTRISANJA

Vektor jačine elektrostatičkog polja naelektrisanja Q u tački M (eksperiment)



$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_p}=k\frac{Qq_p}{r^2}\hat{r}\frac{1}{q_p}=k\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad \left[\frac{N}{C}\right]$$

$$\vec{E}=k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$Q>0 \Rightarrow \vec{E}$ je istog smera kao $\hat{r}$ $\Rightarrow \vec{E}$ je usmereno od Q	
$Q<0 \Rightarrow \vec{E}$ je suprotno od $\hat{r}$ $\Rightarrow \vec{E}$ je usmereno ka Q	

$E=k\frac{Q}{r^2}$ - algebarska vrednost

$E=k\frac{|Q|}{r^2}$ - skalarna vrednost (intenzitet)

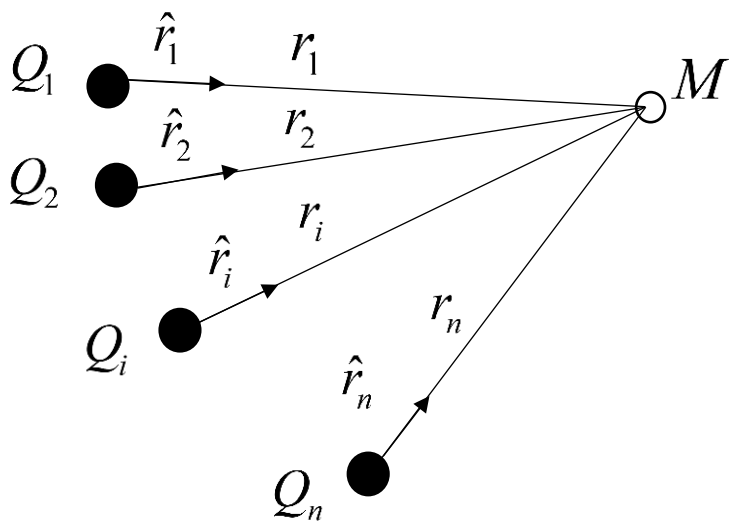
2.2.2 ELEKTROSTATIČKO POLJE SKUPA TAČKASTIH NAELEKTRISANJA

Posmatramo skup od n tačkastih naelektrisanja $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ i uočimo tačku *M* koja je od ovih naelektrisanja udaljena redom $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

Sa $r_1, \hat{r}_2, \cdots, \hat{r}_n$ označimo jedinične vektore usmerene od naelektrisanja duž pravca određenih rastojanjima $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

Rezultujuća jačina elektrostatičkog polja u tački *M* jednaka je vektorskom zbiru jačina elektrostatičkih polja koja u toj tački stvaraju pojedina naelektrisanja.

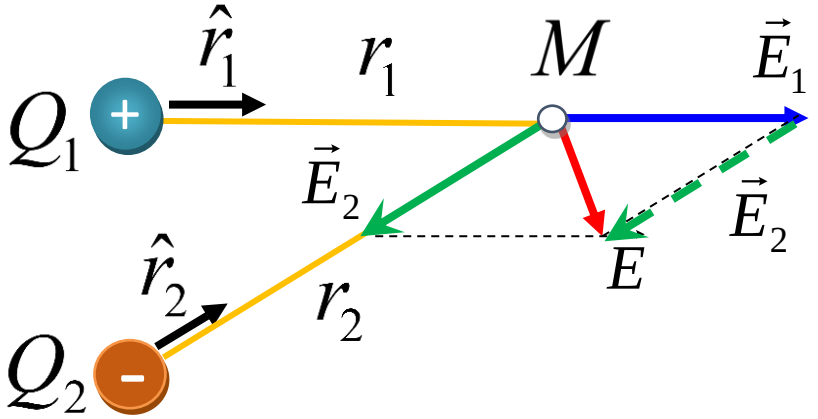
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \hat{r}_i$$



Primer. Posmatramo $n = 2$ tačkasta naelektrisanja i tačku *M*

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \hat{r}_1 + \frac{Q_2}{r_2^2} \cdot \hat{r}_2 \right)$$

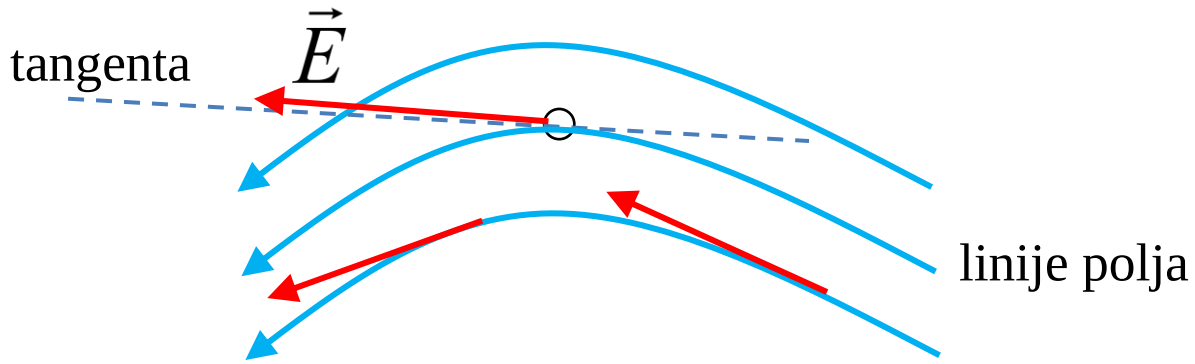
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{2} \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \hat{r}_i$$



2.2.3 LINIJE ELEKTROSTATIČKOG POLJA

Elektrostatičko polje je vektorsko polje koje se slikovito može prikazati tzv. linijama polja.

Linije elektrostatičkog polja su zamišljene linije koje u svakoj tački za tangentu imaju vektor jačine elektrostatičkog polja $\vec{E}$.



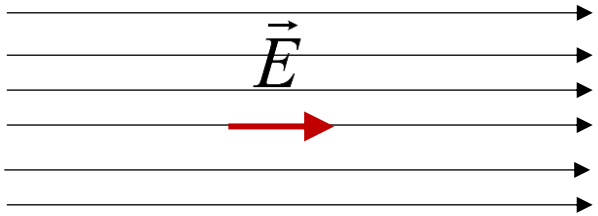
Smer linije polja je određen smerom projekcije vektora $\vec{E}$ na liniju polja.

Skup linija polja naziva se spektar polja.

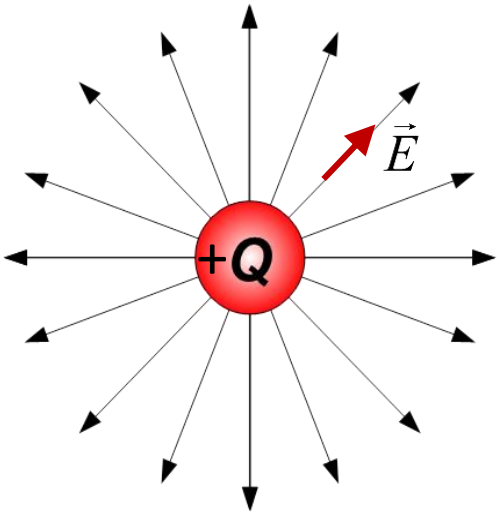
Nehomogeno elektrostatičko polje je elektrostatičko polje kod koga se pravac, smer i intenzitet menjaju od tačke do tačke u prostoru.

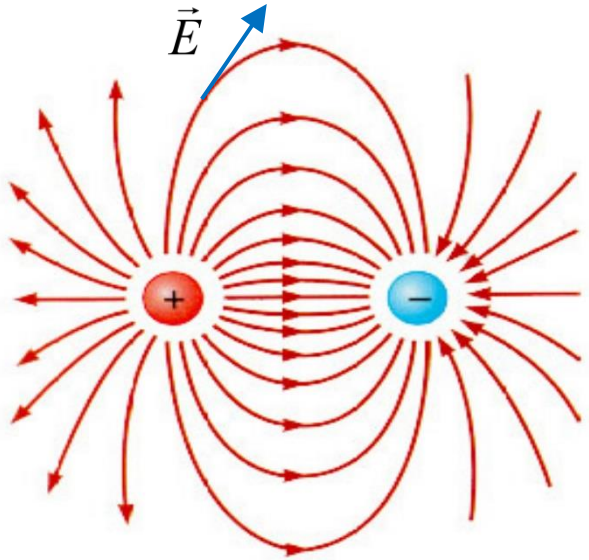
Homogeno elektrostatičko polje je polje koje u svim tačkama prostora ima isti pravac, smeri i intenzitet. Linije homogenog polja su paralelne i ekvidistantne.

Linije homogenog elektrostatičkog polja



Linije elektrostatičkog polja tačkastih naelektrisanja (nehomogeno polje)





3 POTENCIJAL ELEKTROSTATIČKOG POLJA

3.1 RAD U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

Posmatramo tačkasto naelektrisanje Q koje se kreće od tačke A do tačke B u elektrostatičkom polju jačina $\vec{E}$. Polje $\vec{E}$ deluje na naelektrisanje Q silom:

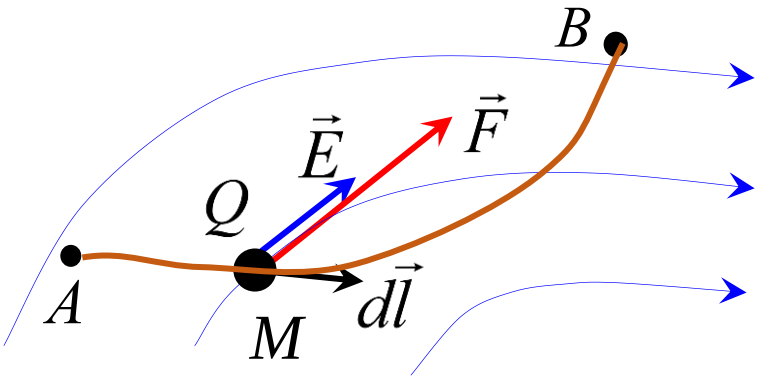
$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

Elementarni rad koji izvrše sile polja pri premeštanju Q na malom putu dl:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = QEdl\cos\measuredangle(\vec{E}, d\vec{l})$$

Ukupan rad koji izvrše sile polja pri prebacivanju naelektrisanja Q od tačke A do tačke B:

$$A = \int_A^B dA = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

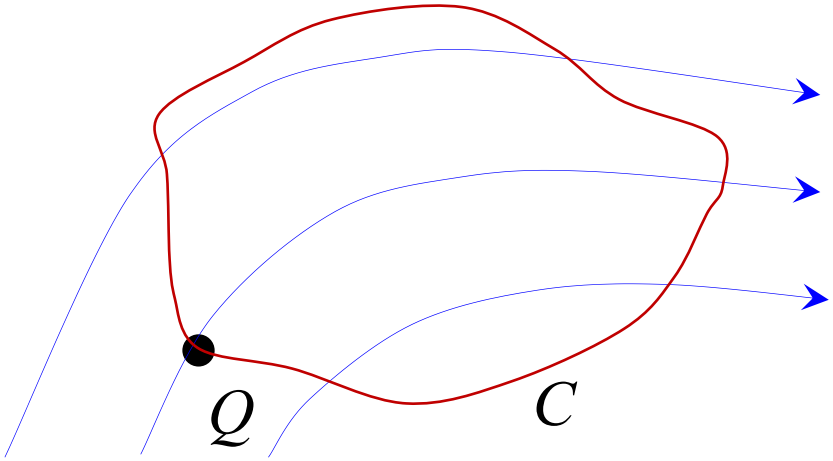


Ako je $A > 0$ - telo se kreće pod dejstvom sila polja. Ako je $A < 0$ - telo se kreće protiv sila polja.

KONZERVATIVNI KARAKTER ELEKTROSTATIČKOG POLJA

Polje je konzervativno ako je rad sila polja po zatvorenoj putanji jednak 0!

Elektrostatičko polje je konzervativno.



Dokaz.

Posmatramo kretanje naelektrisanja po zatvorenoj putanji C u elektrostatičkom polju.

Neka je rad sila polja pri kretanju naelektrisanja duž zatvorene putanje različit od nule.

Ako se naelektrisanje neograničeno dugo kreće po zatvorenoj putanju, polje će izvršiti neograničeni (beskonačni) rad, što je u suprotnosti sa zakonom o održanju rada i energije.

Prema tome, rad sila elektrostatičkog polja po zatvorenoj putanji je jednak nuli.

Odavde sledi da je elektrostatičko polje konzervativno. □

USLOV KONZERVATIVNOSTI ELEKTROSTATIČKOG POLJA

Polazimo od uslova konzervativnosti iskazanog preko rada:

$A = 0$ duž proizvoljne zatvorene putanje u elektrostatičkom polju, tj.

$$A = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

gde je sa $\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$ označen linijski integral vektora $\vec{V}$ po zatvorenoj putanji C

Uslov konzervativnosti za elektrostatičko polje glasi:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

tj.

Linijski integral vektora $\vec{E}$ po proizvoljnoj zatvorenoj putanji C iznosi nula.

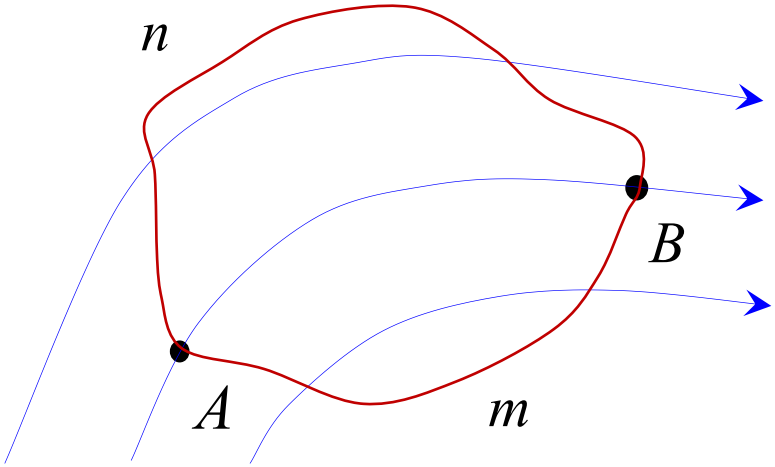
POSLEDICA KONZERVATIVNOG KARAKTERA elektrostatičkog polja:

Rad sila polja pri pomeranju naelektrisanja između dve tačke ne zavisi od oblika putanje po kojoj se naelektrisanje pomera, već samo od položaja tih tačaka.

Dokaz.

$$A = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{Am}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{Bn}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{Am}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_{Bn}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{An}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



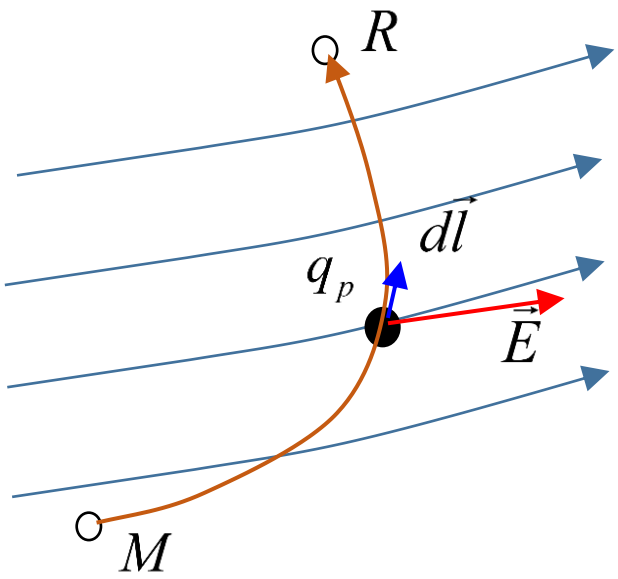
$$\int_{Am}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{An}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad :Q \quad \Rightarrow \quad \int_{Am}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{An}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Linijski integral vektora elektrostatičkog polja između dve tačke u polju ne zavisi od oblika putanje integracije već samo od položaja tih tačaka.

3.2 ELEKTROSTATIČKI POTENCIJAL

Rad koji izvrši elektrostatičko polje pri prebacivanju probnog naelektrisanja q_p iz tačke M u tačku R po proizvoljnoj putanji iznosi:

$$A = \int_M^R \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_p \int_M^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Pošto u tačkama M i R probno naelektrisanje miruje, na osnovu zakona o održanju rada i energije sledi:

Rad A koji izvrši elektrostatičko polje jednak je potencijalnoj energiji elektrostatičkog polja W_p koju naelektrisanje q_p ima u tački M u odnosu na tačku R (referentna tačka).

$$W_p = A = q_p \int_M^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_p = A = q_p \int_M^R \vec{E} \cdot d\vec{l} \;\Big|\; : q_p$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\varphi \triangleq \frac{W_p}{q_p}}$$

Elektrostatički potencijal φ u nekoj tački A električnog polja definiše se kao količnik potencijalne energije W_p koju naelektrisanje q_p ima u toj tački u odnosu na referentnu tačku R i količine tog naelektrisanja q_p.

$$\varphi = \int_M^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Brojna vrednost elektrostatičkog potencijala

Potencijal bilo koje tačke M u elektrostatičkom polju u odnosu na referentnu tačku R brojno je jednak linijskom integralu vektora elektrostatičkog polja od tačke M do referentne tačke R.

$$\varphi = \int_M^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Jedinica za potencijal je Volt (V)

$\Rightarrow$ jedinica za jačinu elektrostatičkog polja V/m

Referentna tačka R može se izabrati i u beskonačnosti ∞:

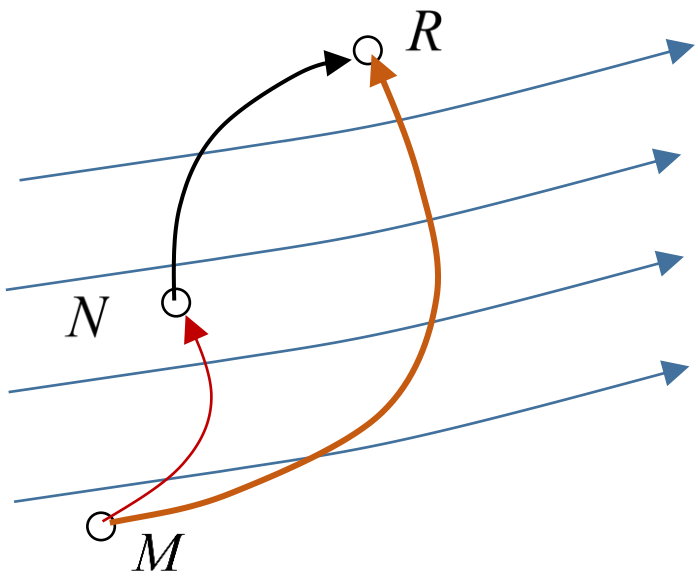
$$\varphi = \int_M^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Potencijal proizvoljno usvojene referentne tačke R iznosi nula:

$$\varphi = \int_R^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

3.3 RAZLIKA POTENCIJALA IZMEĐU DVE TAČKE (NAPON)

Posmatramo dve tačke M i N u elektrostatičkom polju i neka je zadata referentna tačka R.



Potencijali tačaka M i N u odnosu na R iznose:

$$\varphi_M = \int_M^R \vec{E}\cdot d\vec{l}\ , \qquad \varphi_N = \int_N^R \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Razlika potencijala između tačaka M i N predstavlja potencijalnu razliku ili napon U_{MN}:

$$U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = \int_M^R \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_N^R \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_M^R \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_R^N \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_M^N \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Potencijalna razlika (napon) između dve tačke jednaka je linijskom integralu električnog polja između tih tačaka.

$$U_{NM} = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

RAD I NAPON U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

Rad pri pomeranju naelektrisanja između tačaka M i N:

$$A = \int_M^N \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q\left(\varphi_M - \varphi_N\right) = QU_{MN}$$

Rad pri pomeranju naelektrisanja između tačaka M i N jednak je proizvodu količine naelektrisanja Q i napona U_{MN} između tačaka M i N.

$$A = QU_{MN}$$

3.4 POTENCIJAL TAČKASTOG NAELEKTRISANJA U HOMOGENOJ SREDINI

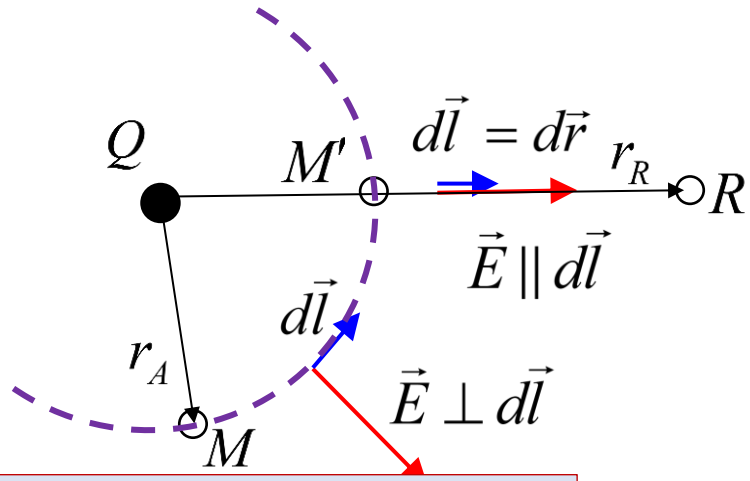
Posmatramo usamljeno tačkasto naelektrisanje Q u homogenoj sredini dielektrične konstante ε.

Potencijal tačke M u odnosu na referentnu tačku R iznosi

$$\varphi_M = \int_M^R \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_M^{M'} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{M'}^R \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{M'}^R E dl = \int_{M'}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{M'}^R \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{-1}{r}\Big|_{r=r_M}^{r=r_R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(1/r_M - 1/r_R\right)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_R}\right)}$$



Za $r_R \to \infty$ (referentna tačka je u beskonačnosti)

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}}$$

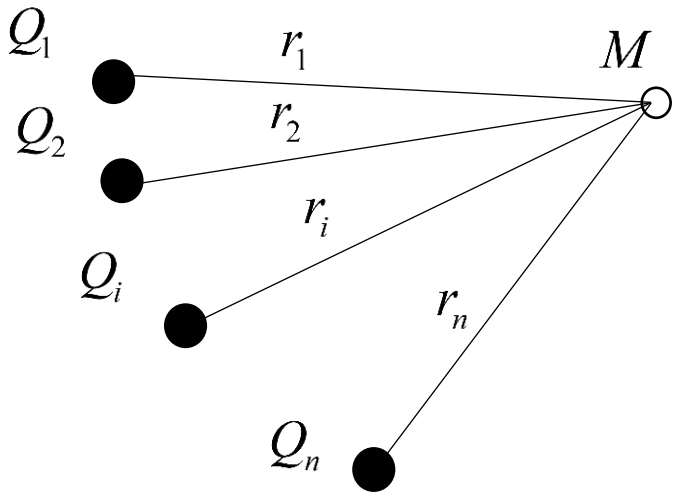
U izraz za potencijal naelektrisanja treba unositi sa njihovim algebarskim predznakom.

3.5 POTENCIJAL SISTEMA TAČKASTIH NAELEKTRISANJA

Posmatramo skup od n tačkastih naelektrisanja $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ i uočimo tačku M koja je od ovih naelektrisanja udaljena redom $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

Jačina elektrostatičkog polja u tački M jednaka je vektorskom zbiru polja koja potiču od pojedinačnih naelektrisanja.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} E_i$$



Potencijal u tački M iznosi

$$\varphi_M = \int_M^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_M^R \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_M^R \vec{E}_i \cdot d\vec{l}}_{\varphi_i} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

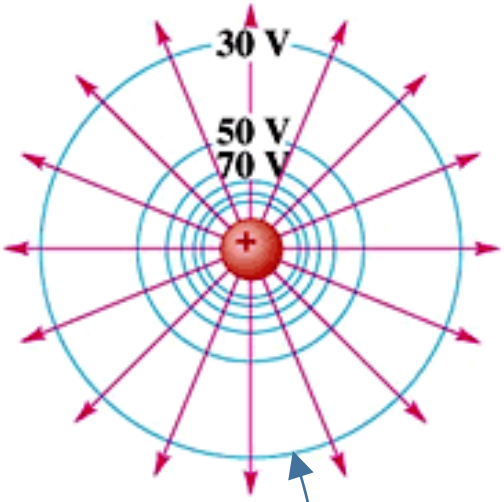
Potencijal sistema tačkastih naelektrisanja jednak je algebarskom zbiru potencijala pojedinih naelektrisanja.

$$\varphi_M = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

3.6 EKVIPOTENCIJALNE POVRŠINE

Površine koje u svakoj tački imaju isti potencijal nazivaju se ekvipotencijalne površine.

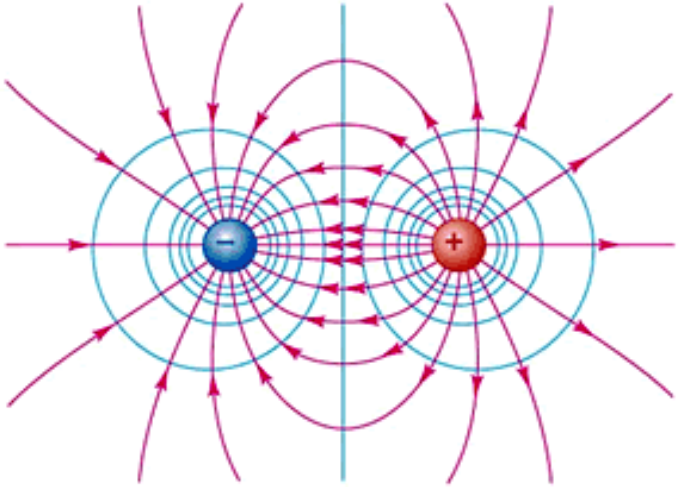
$$\varphi = const$$

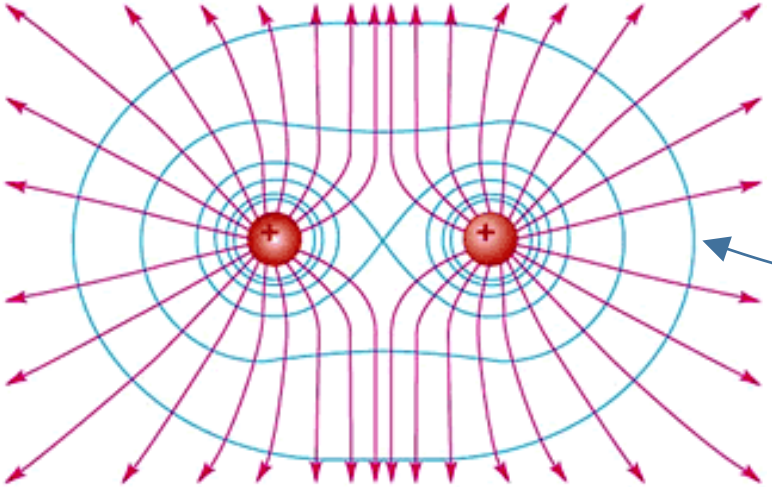


Za tačkasto naelektrisanje uslov za ekvipotencijalnu površinu:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} = const \quad \Rightarrow \quad r = const$$

Za dva tačkasta naelektrisanja ekvipotencijalne površine su:





ekvipotencijalne površi

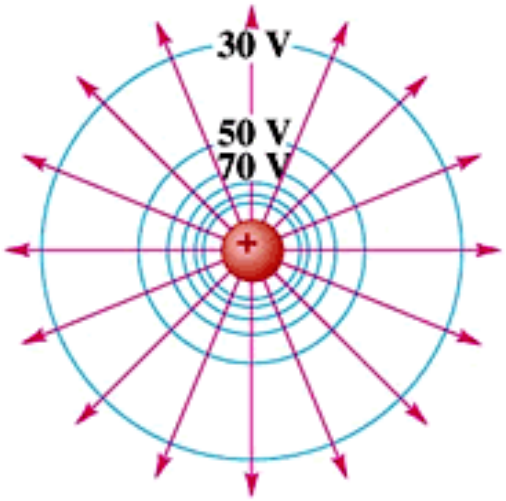
Iz definicije ekvipotencijalne površine sledi:

Rad pri pomeranju naelektrisanja duž ekvipotencijalne površine jednak je nuli.

$$A = Q(\underbrace{\varphi_M - \varphi_N}_{0}) = 0$$

Linije polja i ekvipotencijalne površi su međusobno normalne.

$$A = Q\int_M^N \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp d\vec{l}$$



Ekvipotencijalne površine, kao i linije polja se ne mogu seći.

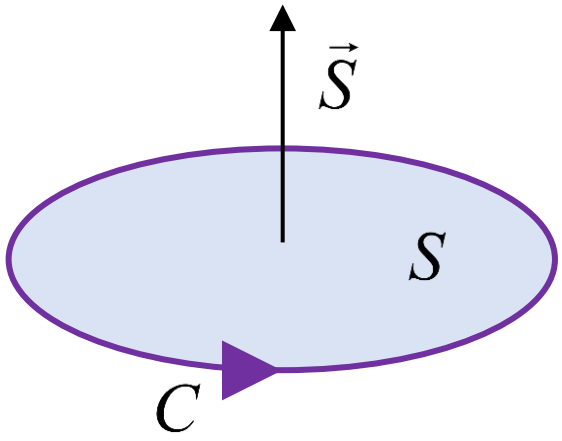
4 GAUSOV ZAKON

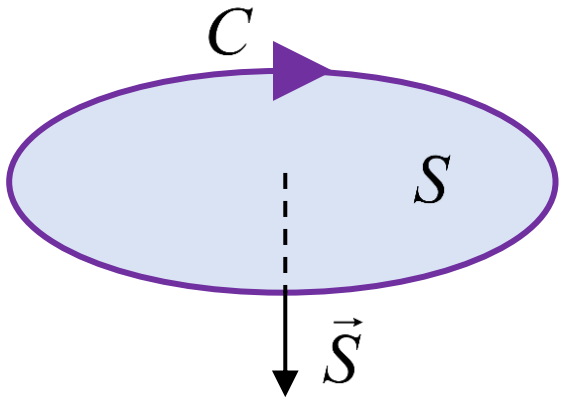
4.1 VEKTOR POVRŠINE

Posmatrajmo jednu zatvorenu i orjentisanu konturu C koja leži u nekoj ravni. Uočimo površinu S u ovoj ravni koja se oslanja na ovu konturu.

Vektor ravne površine $\vec{S}$ je vektor čiji je:

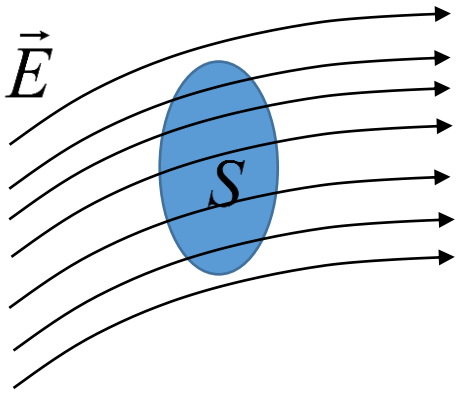
- intenzitet jednak vrednosti površine S,
- pravac odgovara pravcu normale na površinu, a
- smer se određuje po pravilu desne zavojnice (desne šake) u odnosu na usvojenu orjentaciju konture na koju se ta površina oslanja.





4.2 FLUKS VEKTORA ELEKTROSTATIČKOG POLJA

Fluks vektora elektrostatičkog polja $\vec{E}$ kroz neku površinu S proporcionalan je broju linija polja koje prodiru tu površinu.

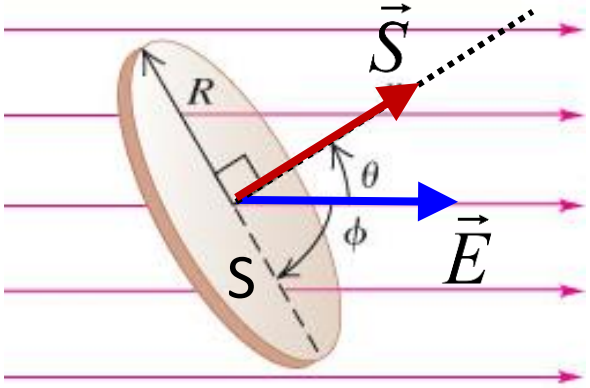


Fluks vektora je skalarna veličina i obeležavamo ga sa Φ.

4.2.1 FLUKS HOMOGENOG ELEKTROSTATIČKOG POLJA

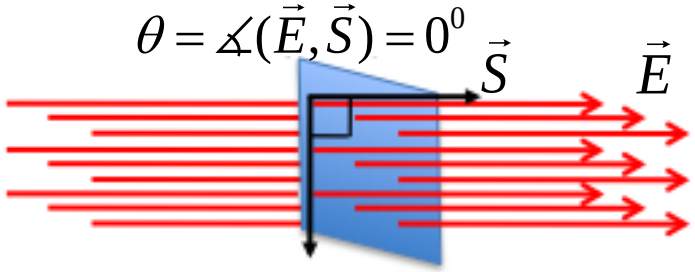
U homogenom elektrostatičkom polju fluks vektora $\vec{E}$ kroz ravnu površinu S izračunava se kao skalarni proizvod vektora $\vec{E}$ i vektora te površine $\vec{S}$:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES\cos\theta \quad \left[Nm^2 / C \right]$$

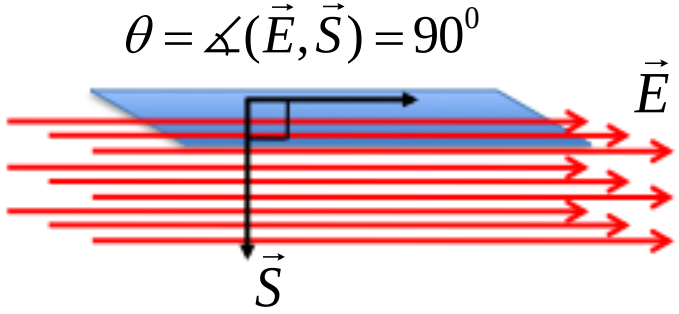


Specijalni slučajevi $\theta = \measuredangle(\vec{E}, \vec{S})$

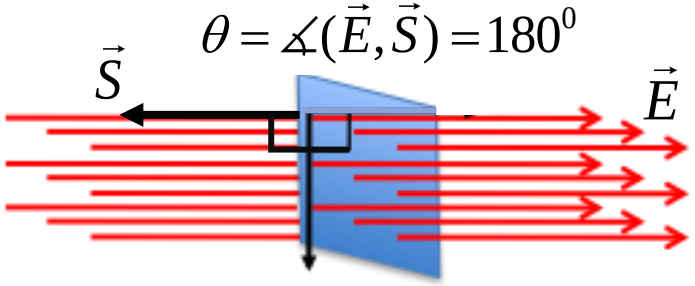
$\theta = 0$, onda $\Phi = ES = \Phi_{\max}$



$\theta = 90^0$, onda $\Phi = 0$



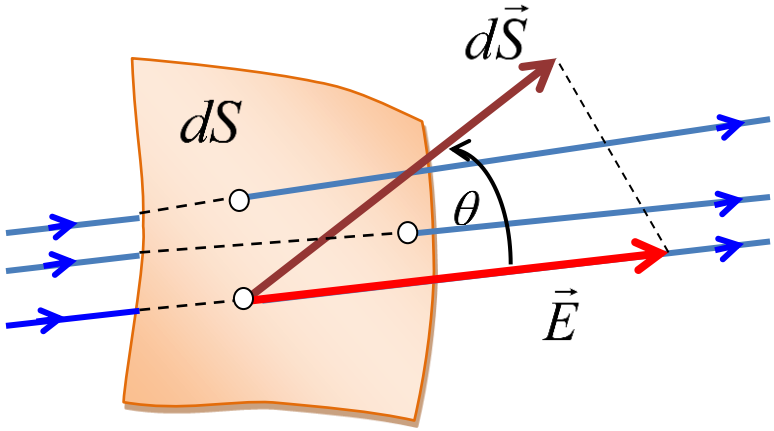
$\theta = 180^0$, onda $\Phi = -ES$



4.2.2 FLUKS NEHOMOGENOG ELEKTROSTATIČKOG POLJA

Elementarni fluks vektora jačine električnog polja $\vec{E}$ kroz površinu dS iznosi:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos\theta$$



Ukupni fluks vektora $\vec{E}$ kroz površinu S iznosi:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

4.2.3 FLUKS KROZ ZATVORENU POVRŠINU

Zatvorena površina nema konturu C na koju se oslanja pa se ne može govoriti o smeru vektora površine.

Tada se koriste pojmovi **ulazne** i **izlazne jedinične normale** $\vec{n}$ zatvorene površine.

Fluks vektora jačine elektrostatičkog polja kroz zatvorenu površinu može se izračunati u smeru ulazne (ulazni fluks) ili izlazne (izlazni fluks) jedinične normale na površinu.

Ova dva fluksa su ista po apsolutnoj vrednosti ali suprotna po znaku.

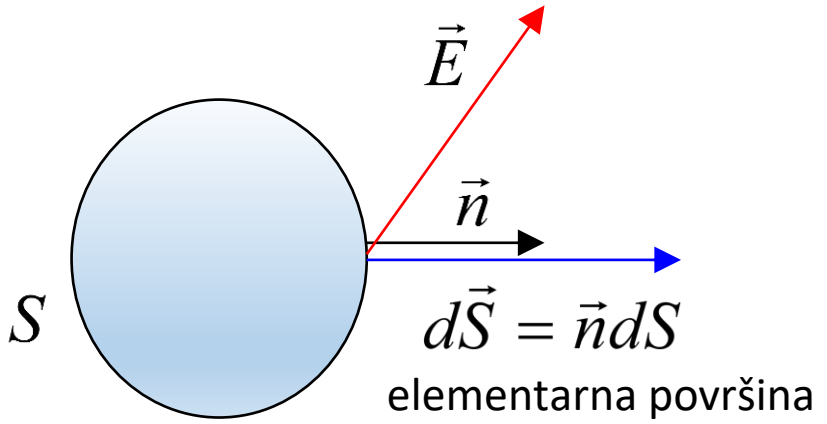
U elektrotehnici se isključivo koristi fluks u smeru izlazne normale – izlazni fluks.

Izlazni fluks kroz elementarnu površinu $d\vec{S}$:

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = \vec{E}\vec{n}dS$$

Izlazni fluks kroz zatvorenu površinu:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E}\cdot \vec{n}dS$$

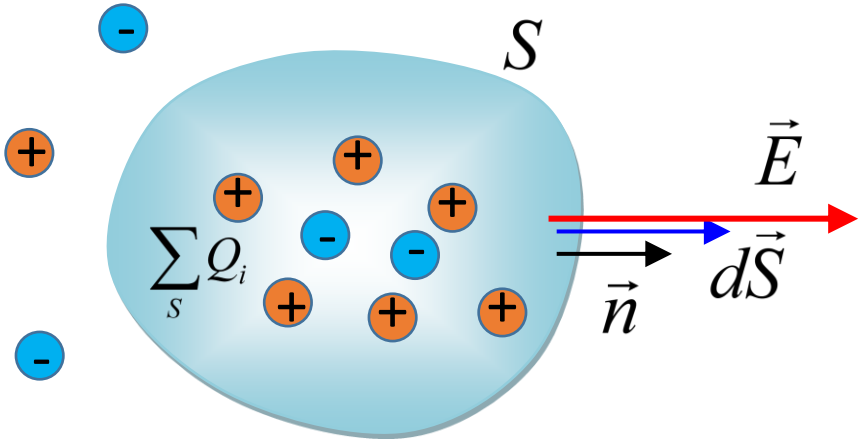


4.2.4 GAUSOV ZAKON

Gausov zakon važi samo za elektrostatička polja u vakumu.

Izlazni fluks vektora jačine električnog polja $\vec{E}$ kroz zatvorenu površinu S jednak je količniku algebarskog zbira svih količina naelektrisanja koja su obuhvaćena tom površinom i dielektrične konstante vakuma ε_0:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_S Q_i}{\varepsilon_0}$$



Namena. Gausov zakon iskazuje izvorni karakter elektrostatičkog polja.

$\Phi > 0$ - linije polja izviru sa „+“naelektrisanja.

$\Phi < 0$ - linije polja poniru na „-"naelektrisanja.

PRIMENA GAUSOVOG ZAKONA

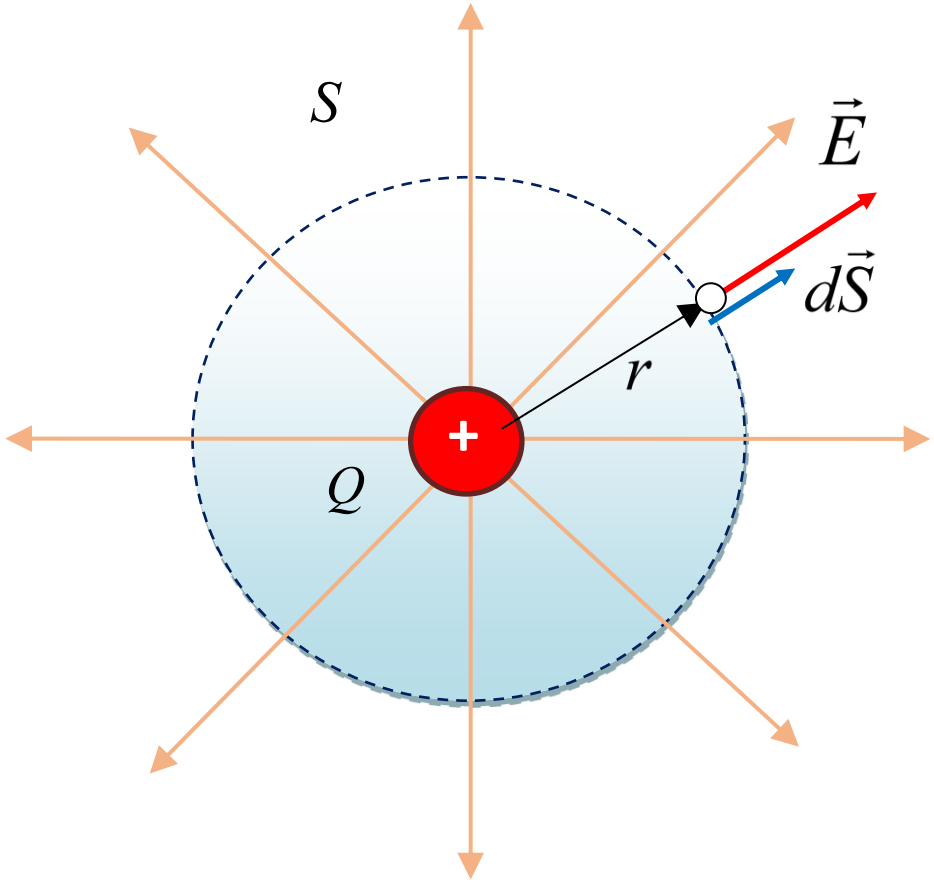
Gausov zakon služi za određivanje jačine elektrostatičkog polja naelektrisanih tela koja imaju neku simetriju.

Usamljeno tačkasto naelektrisanje u vakumu

Za zatvorenu površ S usvajamo loptu sa centom u tačkastom naelektrisanju.

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S EdS = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = k\frac{Q}{r^2}}$$

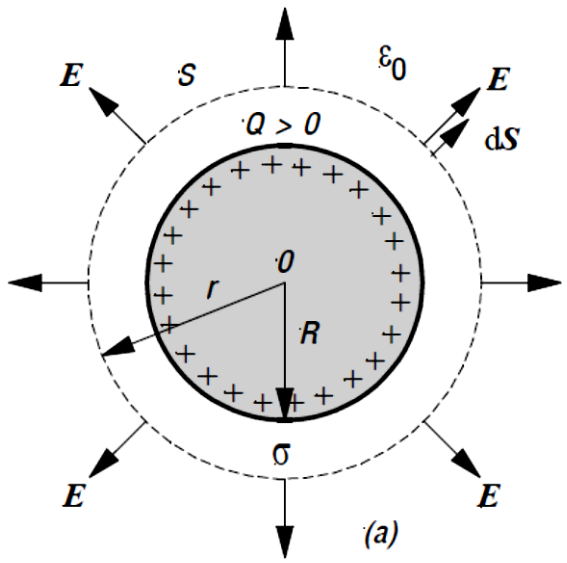


$$\boxed{\varphi} = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{r} = \int_r^\infty k\frac{Q}{r^2}dr = kQ\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -kQ\left(1/\infty - 1/r\right) = \boxed{k\frac{Q}{r}}$$

Površinski naelektrisana metalna sfera

Za zatvorenu površ S usvajamo loptu čiji se centar poklapa sa centom sfere.



$r \geq R$ $\quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E dS = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = k\frac{Q}{r^2}$$

Za $r \geq R$ polje i potencijal su isti kao i kod tačkastog naelektrisanja!

$$\boxed{\varphi} = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_r^\infty k\frac{Q}{r^2} dr = kQ\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -kQ\left(1/\infty - 1/r\right) = \boxed{k\frac{Q}{r}}$$

$r < R$ $\Rightarrow$ $E = 0$, jer u unutrašnjosti sfere nema naelektrisanja

$$\boxed{\varphi} = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}\, d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_R^\infty k\frac{Q}{r^2} dr = \boxed{k\frac{Q}{R}}$$

Za $r < R$ polje je nula a potencijal je konstantan i različit od nule!

Površinski naelektrisana beskonačna ravan

Za zatvorenu površ S usvajamo valjak simetrično postavljen u odnosu na naelektrisanu ravan, gde je S_0 - površina omotača, S - površina bazisa

$$Q = \sigma S$$

simetrija $\Rightarrow$ $E_1 = E_2 = E$

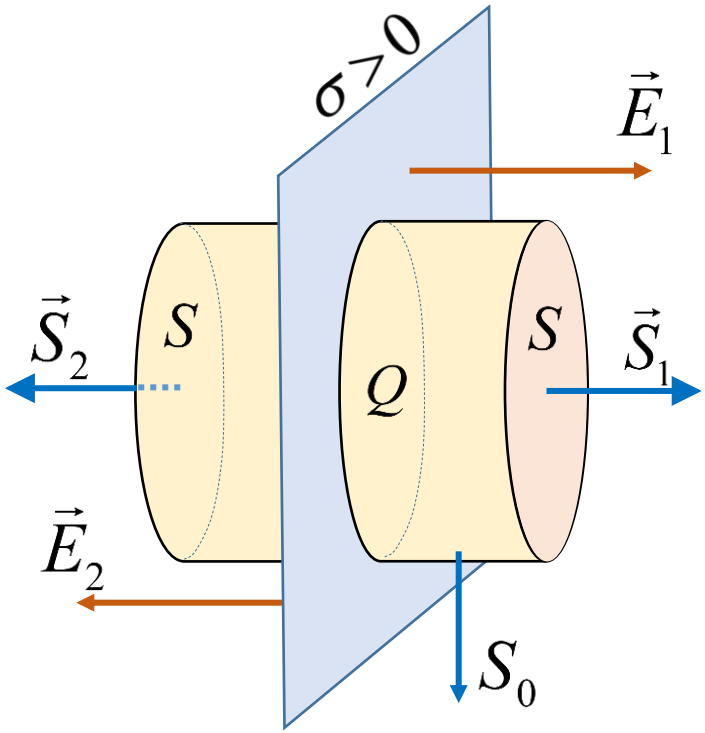
$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_0} \vec{E} d\vec{S}_0 + \int_S \vec{E}_1 d\vec{S}_1 + \int_S \vec{E}_2 d\vec{S}_2$$

$$= \int_S E_1 dS_1 + \int_S E_1 dS_1 = \int_S E dS + \int_S E dS$$

$$= ES + ES = 2ES$$

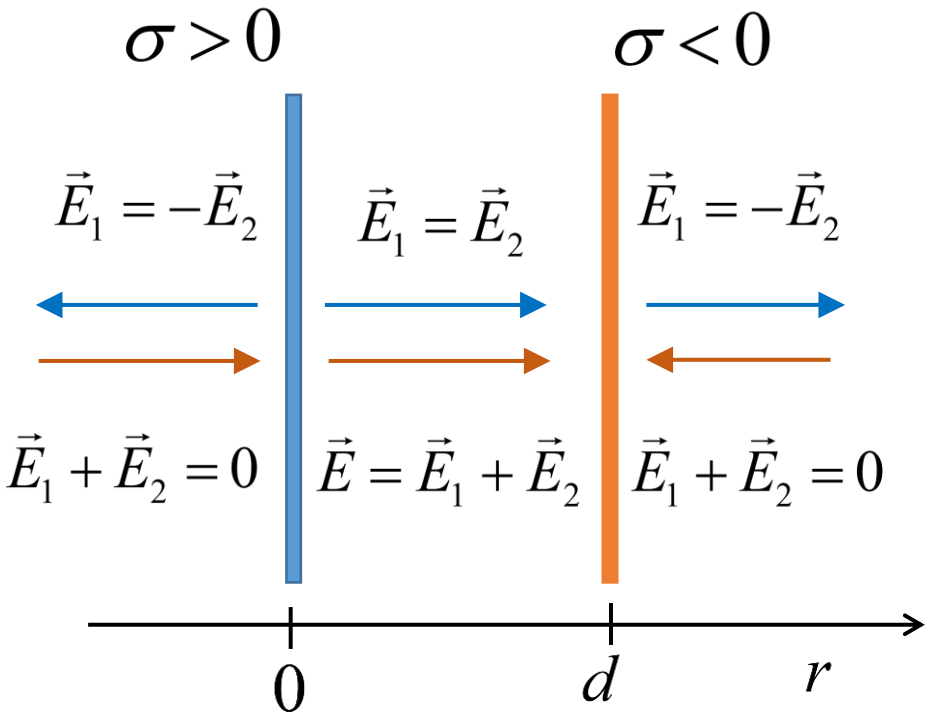
$$2ES = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



Polje je homogeno (ne zavisi od rastojanja od ravni)

Dve površinski naelektrisane beskonačne ravani sa suprotnim naelektrisanjima



1. Električno polje

Polje van ploča se oduzima i iznosi 0.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 0}$$

Polje između ploča se sabira i iznosi:

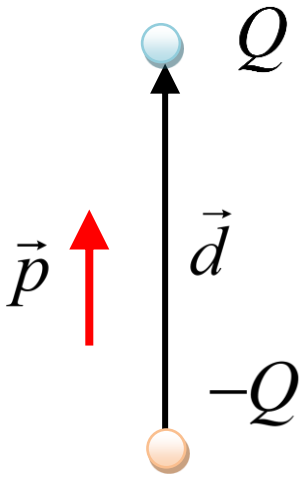
$$E = E_1 + E_2 = 2E_1 = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Polje postoji samo između dve ploče i homogeno je.

2. Napon između ploča

$$U = \int_A^B \vec{E} d\vec{r} = \int_A^B E dr = E\int_0^d dr = Ed \qquad \boxed{U = Ed}$$

4.2.5 ELEKTROSTATIČKI DIPOL



Elektrostatički dipol čine dva tačkasta naelektrisanja, Q i $-Q$, postavljena na malom međusobnom rastojanju.

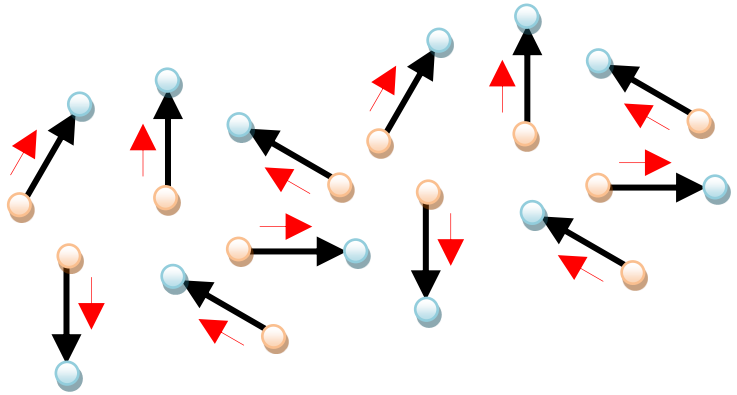
Električni moment dipola: $p = Qd$

Vektorski oblik: $\vec{p} = Q\vec{d}$

Posmatramo N dipola proizvoljno orjentisanih u određenoj zapremini V.

Vektor polarizacije predstavlja zapreminsku gustinu električnih mometa posmatranih dipola u nekoj zapremini V.

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}$$



5 ELEKTRIČNO POLJE U SUPSTANCAMA

Podela supstanci u odnosu na sadržaj slobodnih elementarnih nosioca naelektrisanja:

Provodnici – sadrže veliki broj slobodnih elementarnih naelektrisanja

srebro, zlato, platina, bakar, aluminijum, gvožđe,...

Dielektrici – skoro da ne sadrže slobodna elementarna naelektrisanja

staklo, porcelan, PVC, kvarc

Poluprovodnici – sadrže manji ili veći broj slobodnih nosioca naelektrisanja u zavisnosti od stanja (temperatura, napajanje, ...) u kome se nalaze.

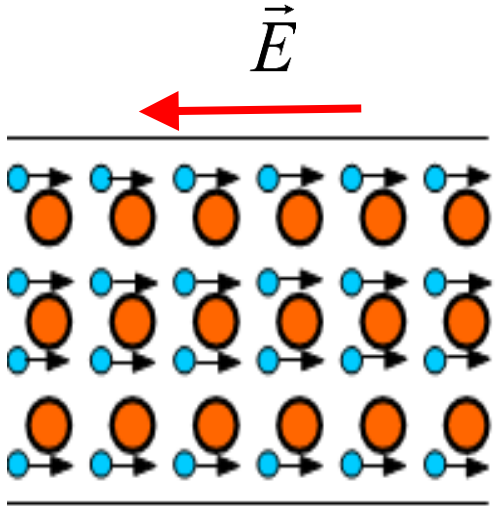
silicijum, germanijum

5.1.1 PROVODNICI U ELEKTRIČNOM POLJU

USAMLJEN PROVODNIK U ELEKTROSTATIČKOM POLJU U VAKUMU

Pod dejstvom polja $\vec{E}$, dolazi do kretanja slobodnih elektrona u provodniku u suprotnom smeru od linija polja.

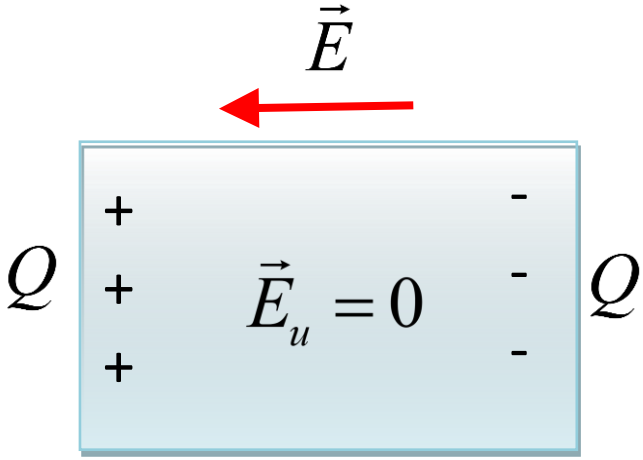
Elektroni dolaze do ivice provodnika i prestaju sa daljim kretanjem (stacionarno stanje).



Posledica: U prisustvu spoljašnjeg polja dolazi do vrlo brze preraspodele slobodnih elektrona unutar provodnika.

Zaključak. Pošto nema usmerenog kretanja elektrona unutar provodnika, elektrostatičko polje unutar provodnika ne postoji, tj.

$$\vec{E}_u = 0$$



RASPODELA NAELEKTRISANJA NA POVRŠINI PROVODNIKA

Posmatramo dve provodne lopte poluprečnika a i b koje su spojene veoma tankim provodnikom i koje se nalaze na dovoljno velikom rastojanju d da se njihov međusobni uticaj na raspodelu naelektrisanja može zanemariti.

Ako se lopte opterete ukupnom količinom naelektrisanja Q, ono će se raspodeliti na obe lopte tako da će jedna biti naelektriasana sa Q_a a druga sa Q_b.

Pošto su lopte spojene provodnikom $\Rightarrow \quad \varphi_a = \varphi_b$.

$$Q = Q_a + Q_b, \quad \varphi_a = \varphi_b$$

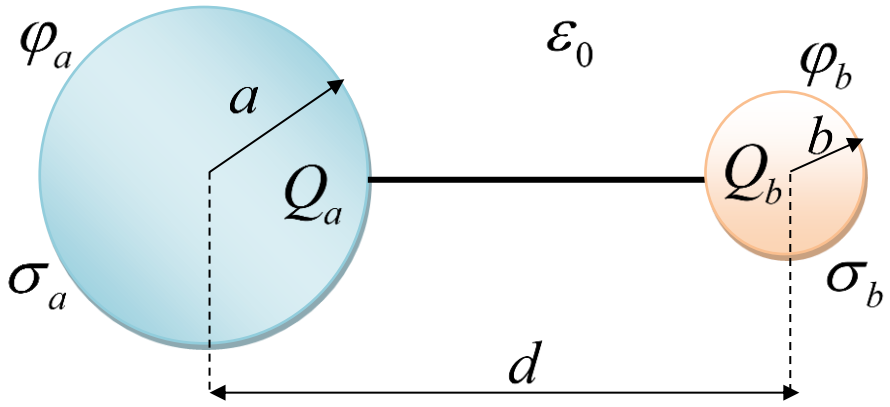
$$\varphi_a = k\frac{Q_a}{d}$$

$$\varphi_b = k\frac{Q_b}{d}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{Q_a = \frac{a}{a+b}Q}$$

$$\boxed{Q_b = \frac{b}{a+b}Q}$$



Količina naelektrisanja će biti veća na lopti većeg poluprečnika.

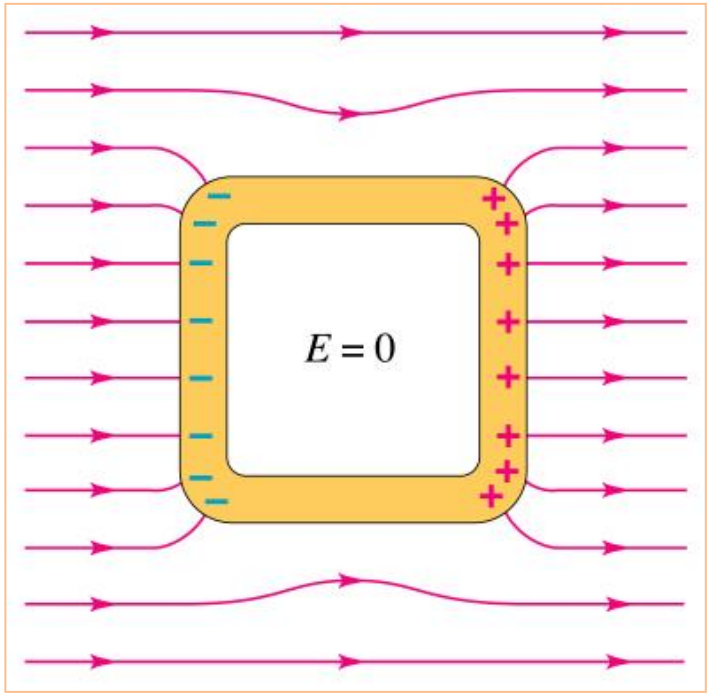
$$\Rightarrow \quad \sigma_a = \frac{Q_a}{4\pi a^2}, \quad \sigma_b = \frac{Q_b}{4\pi b^2} \quad \Rightarrow$$

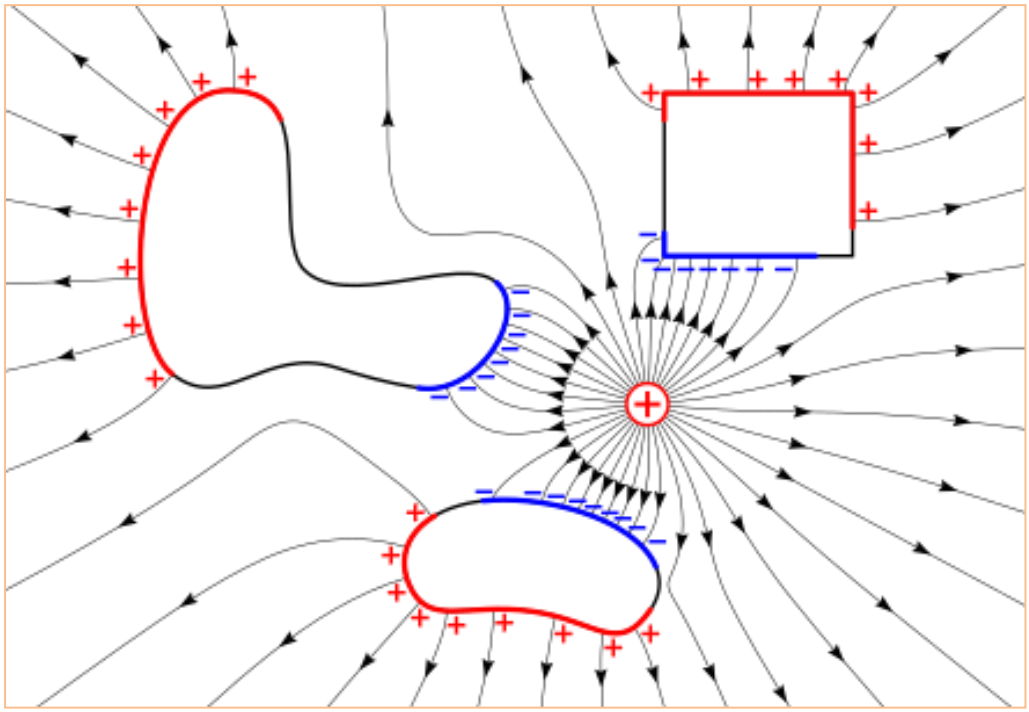
$$\boxed{\sigma_a = \frac{Q}{4\pi(a+b)a}}, \quad \boxed{\sigma_b = \frac{Q}{4\pi(a+b)b}}$$

Površinska gustina naelektrisanja će biti veća na lopti manjeg poluprečnika, tj. površinska gustina naelektrisanja veća je na oštrijim ivicama predmeta.

Primeri raspodela naelektrisanja na provodnim telima

- Površinska gustina slobodnih naelektrisanja je veća na oštrijim površinama.
- Ječina eleltrostatičkog polja unutar provodnika jednaka je nuli.





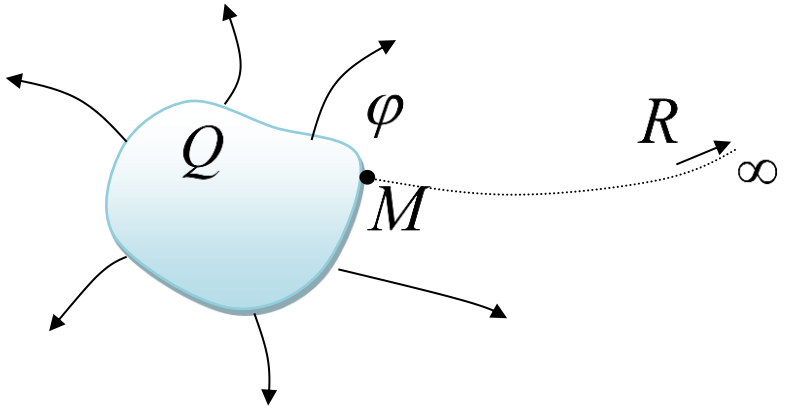
ELEKTRIČNI KAPACITET (KAPACITIVNOST)

Kapacitivnost usamljenog provodnog tela

Posmatramo usamljeno provodno naelektrisano telo sa kol. nael. Q i potencijalom $\varphi = \int_M^R \vec{E} d\vec{l}$ na površini tela.

Kapacitivnost usamljenog provodnog tela se definiše kao količnik njegove količine naelektrisanja Q i potencijala φ:

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{\int_M^R \vec{E} d\vec{l}}$$



Primer. Kapacitivnost sferičnog naelektrisanja poluprečnika $r = a$ u vakumu

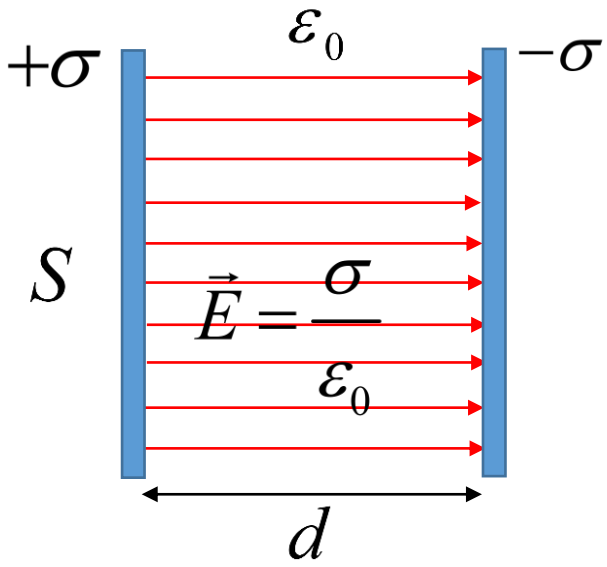
$$\varphi = k_0 \frac{Q}{a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{Q / 4\pi\varepsilon_0 a} = 4\pi\varepsilon_0 a, \qquad \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 a}$$

Kondenzator i njegova kapacitivnost

Kondenzator je sistem od dva blisko postavljena provodna tela (elektrode) naelektrisana istom količinom naelektrisanja ali suprotnih znakova.

Kapacitivnost kondenzatora se definiše kao količnik količine naelektrisanja Q i napona između elektroda kondenzatora:

$$C = \frac{Q}{U}$$



Primer. Pločasti kondenzator

$$U = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{S} \frac{1}{\varepsilon_0} d \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Energija kondenzatora

Energija elektrostatičkog polja kondenzatora iznosi

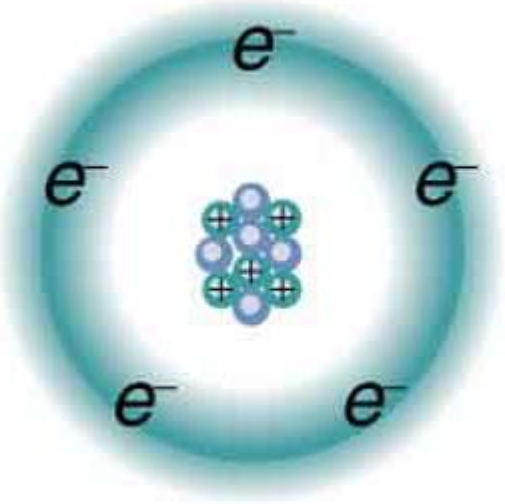
$$W = \frac{1}{2} QU \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} CU^2, \qquad W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

5.1.2 DIELEKTRICI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

Dielektrik je materijal koji, idealizovano posmatrano, nema slobodnih naelektrisanja.

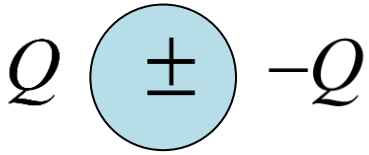
Dielektrični materijali:

- čvrsti - papir, staklo, guma, PVC, ….
- tečni – čista voda, transformatorsko ulje, …
- gasoviti – vazduh, vodonik, …



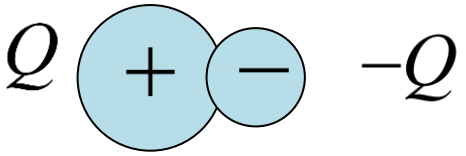
Atom dielektrika je električno neutralan.

Molekuli dielektrika mogu biti:



nepolarni - centri pozitivnog i negativnog naelektrisanja se poklapaju.

polarni - centri pozitivnog i negativnog naelektrisanja se ne poklapaju.



POLARIZACIJA ATOMA DIELEKTRIKA

Nepolarni dielektrik u elektrostatičkom polju $\vec{E}_0$:

Dolazi do pomeranja centara pozitivnog i negativnog naelektrisanja atoma dielektrika.

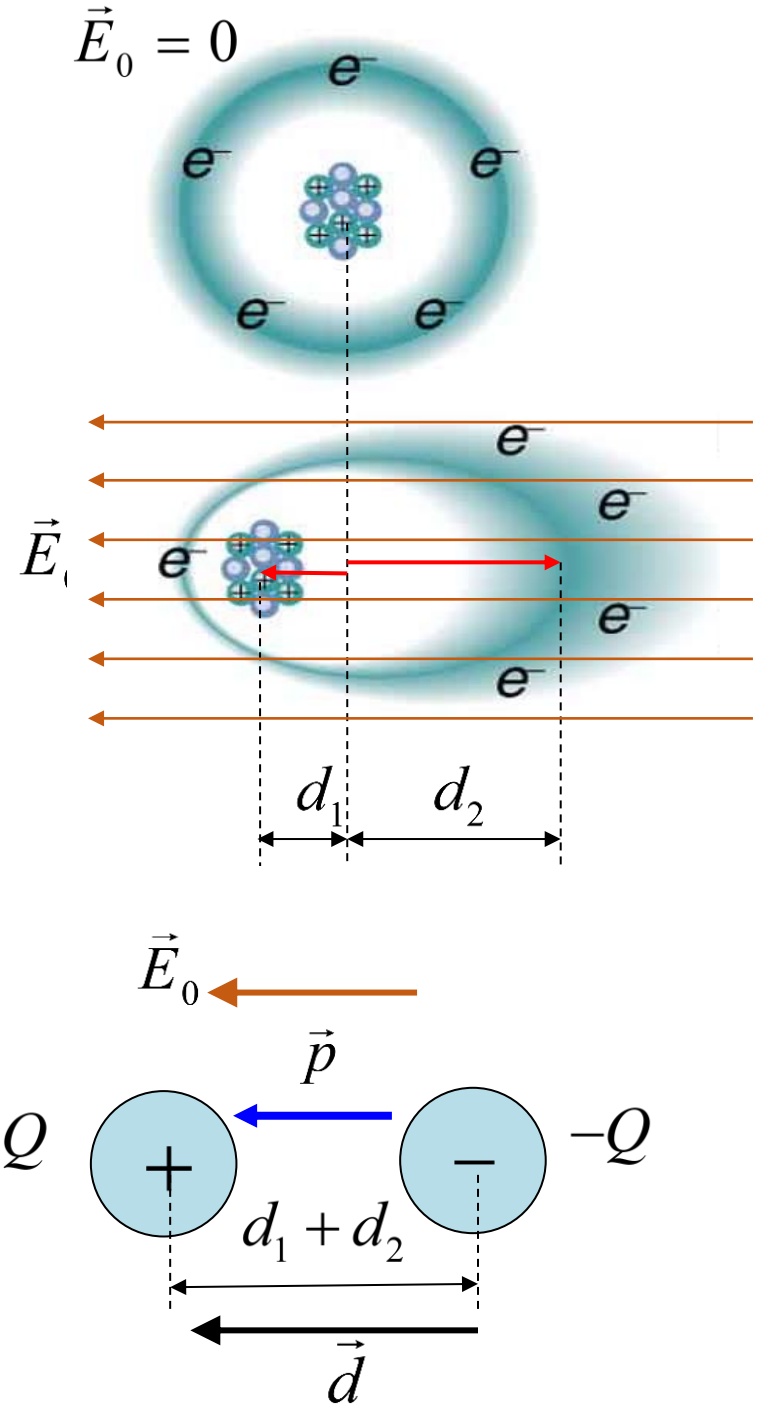
Nastaje diplol, čiji je električni moment:

$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

Električni moment dipola srazmeran je jačini elekrostatičkog polja:

$$\vec{p} \sim \vec{E}_0$$

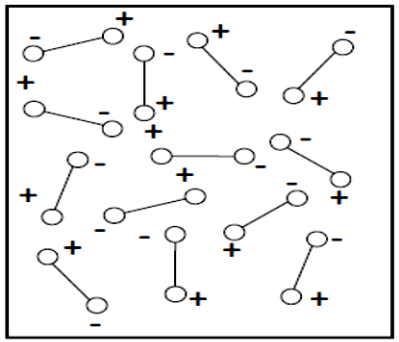
Slično se ponašaju i polarni dielektrici.



POLARIZACIJA DIELEKTRIKA KAO CELINE

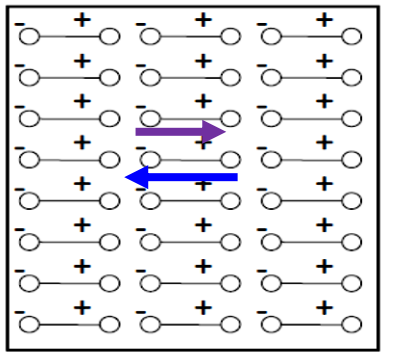
Posmatramo jedan polarni dielektrik

pre polarizacije

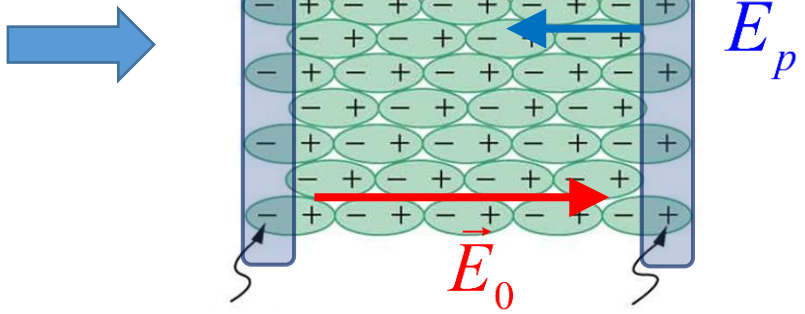


$\vec{E}_0 = 0$

nakon polarizacije



$\vec{E}_0 \neq 0$



Negativno vezano naelektrisanje

Pozitivno vezano naelektrisanje

$\vec{E}_0$ - strano polje,

$\vec{E}_p$ - polje usled polarizacije,

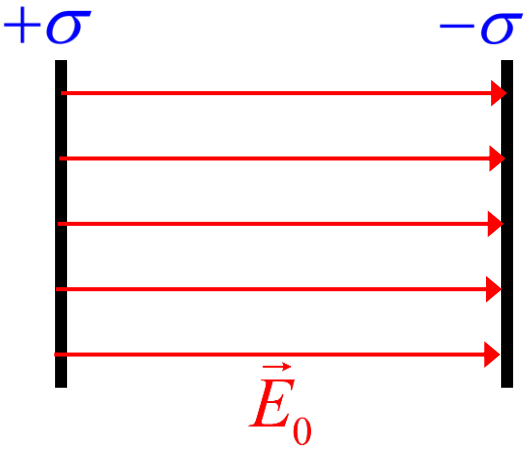
$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ - rezultujuće polje u dielektriku, $E < E_0$

Unutrašnjosti dielektrika poseduje sledeće osobine:

- unutrašnjost je električno neutralna,
- u unutrašnjosti postoji elektrostatičko polje koje je po intenzitetu manje od jačine spoljašnjeg polja ($E < E_0$)

UTICAJ DIELEKTRIKA NA PONAŠANJE ELEKTROSTATIČKOG POLJA

Pločasti kondenzator



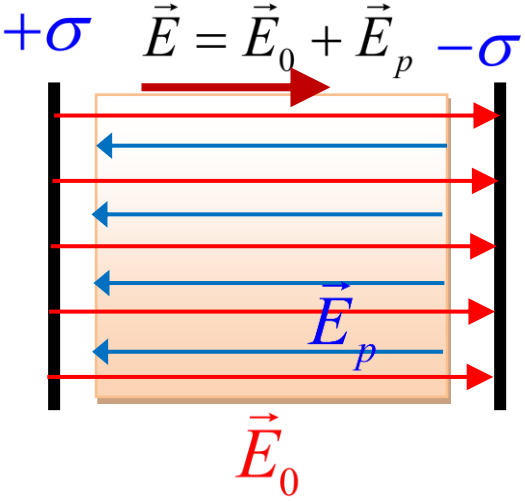
1. Vakumom između elektroda (ε_0)

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad C_0 = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E_0 d} = \frac{\varepsilon_0 \sigma S}{\sigma d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

2. Dielektrik između elektroda ($\varepsilon_0 \leftrightarrow \varepsilon$)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}, \qquad \boxed{E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Ed} = \varepsilon_r \frac{Q}{E_0 d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r C_0, \qquad \boxed{C = \varepsilon_r C_0}$$



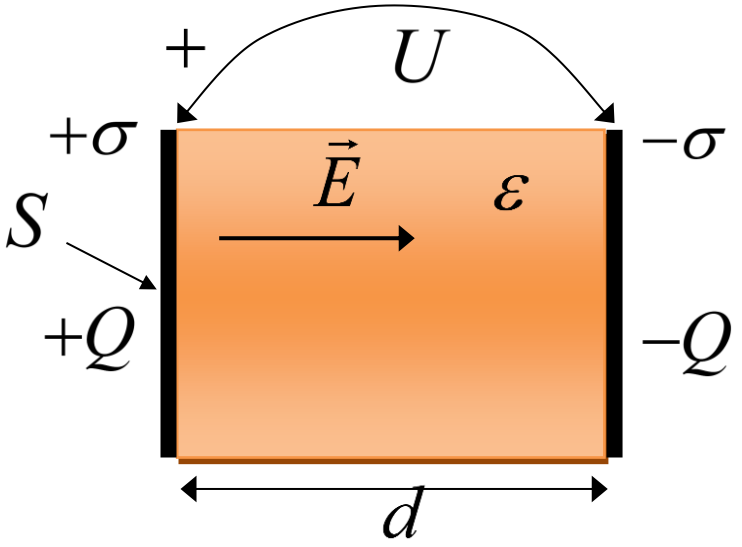
U prisustvu dielektrika:

- jačina elektrostatičkog polja smanjuje se ε_r puta,
- kapacitet kondenzatora povećava se ε_r puta.

ZAPREMINSKA GUSTINA ENERGIJE ELEKTROSTATIČKOG POLJA

Posmatramo pločasti kondenzator sa linearnim dielektrikom

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$



Energija elektrostatičkog polja iznosi:

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\sigma SEd = \frac{1}{2}\varepsilon EE\,Sd$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)V = wV$$

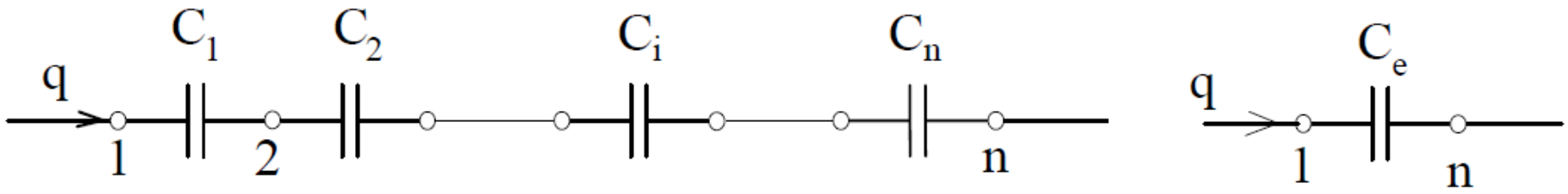
Zapreminska gustina energije elektrostatičkog polja iznosi:

$$W = wV \quad \big|:V \quad \Rightarrow \quad \boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2} \quad \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

Energija je lokalizovana u prostoru gde postoji elektrostatičko polje, bez obzira da li je taj prostor ispunjen vakumom ili nekim dielektrikom.

MEĐUSOBNO VEZIVANJE VIŠE KONDENZATORA

REDNA VEZA KONDENZATORA



$$Q = Q_1 = \cdots = Q_n \quad \Rightarrow \quad C_1U_1 = C_2U_2 = \cdots = C_nU_n$$

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

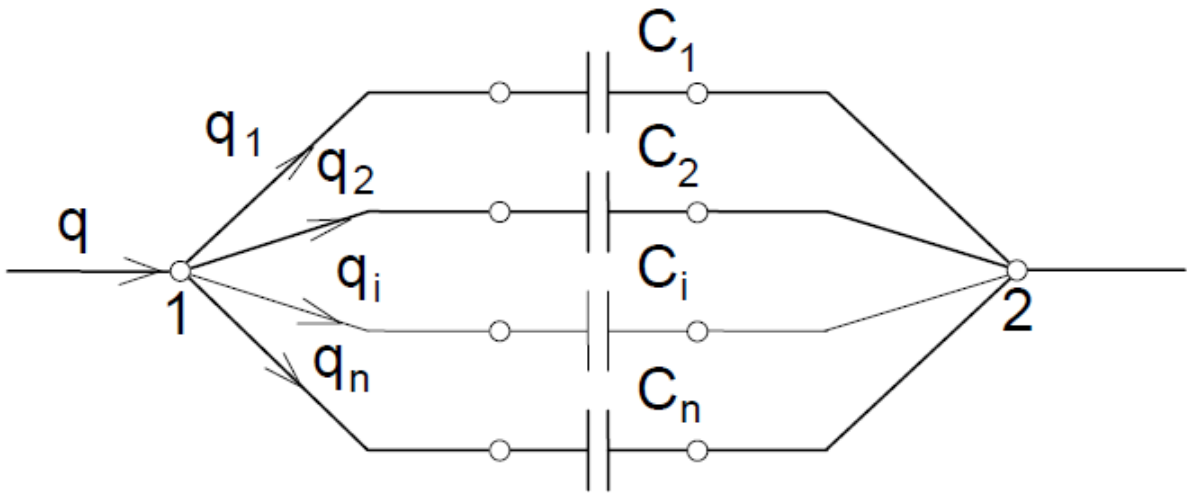
$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$$

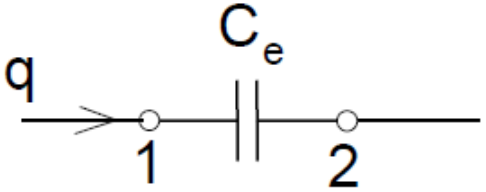
$$= Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) = \frac{Q}{C_e}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

2 kondenzatora: $C_e = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

PARALELNA VEZA KONDENZATORA



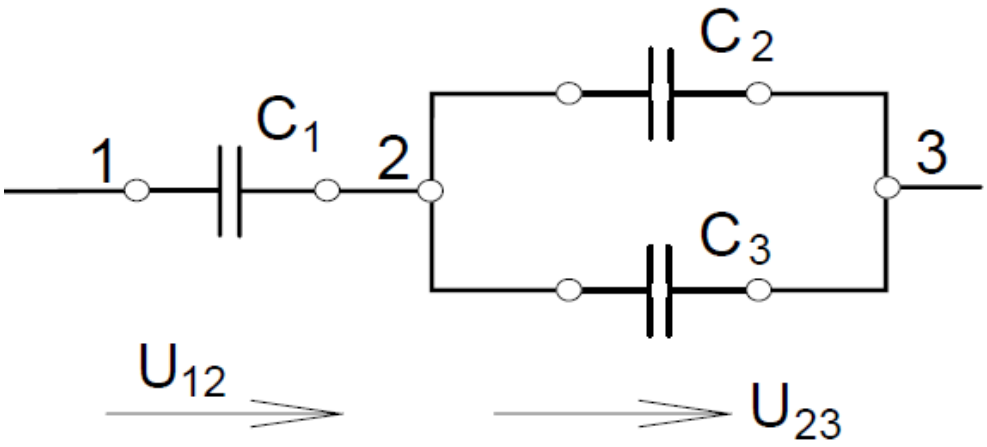


Uslovi:

$$\left.\begin{aligned} &Q_1 = C_1 U,\ Q_2 = C_2 U, \cdots Q_n = C_n U \\ &Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = U\left(C_1 + C_2 + \cdots + C_n\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U = \frac{Q}{C_e},$$

$$\boxed{C_e = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

MEŠOVITA VEZA KONDENZATORA



$$C_{23} = C_2 + C_3$$

$$C = C_{13} = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{C_1 \left(C_2 + C_3 \right)}{C_1 + C_2 + C_3}$$