5. KARAKTERIZACIJA SISTEMA U STACIONARNOM STANJU

Prelazni režim

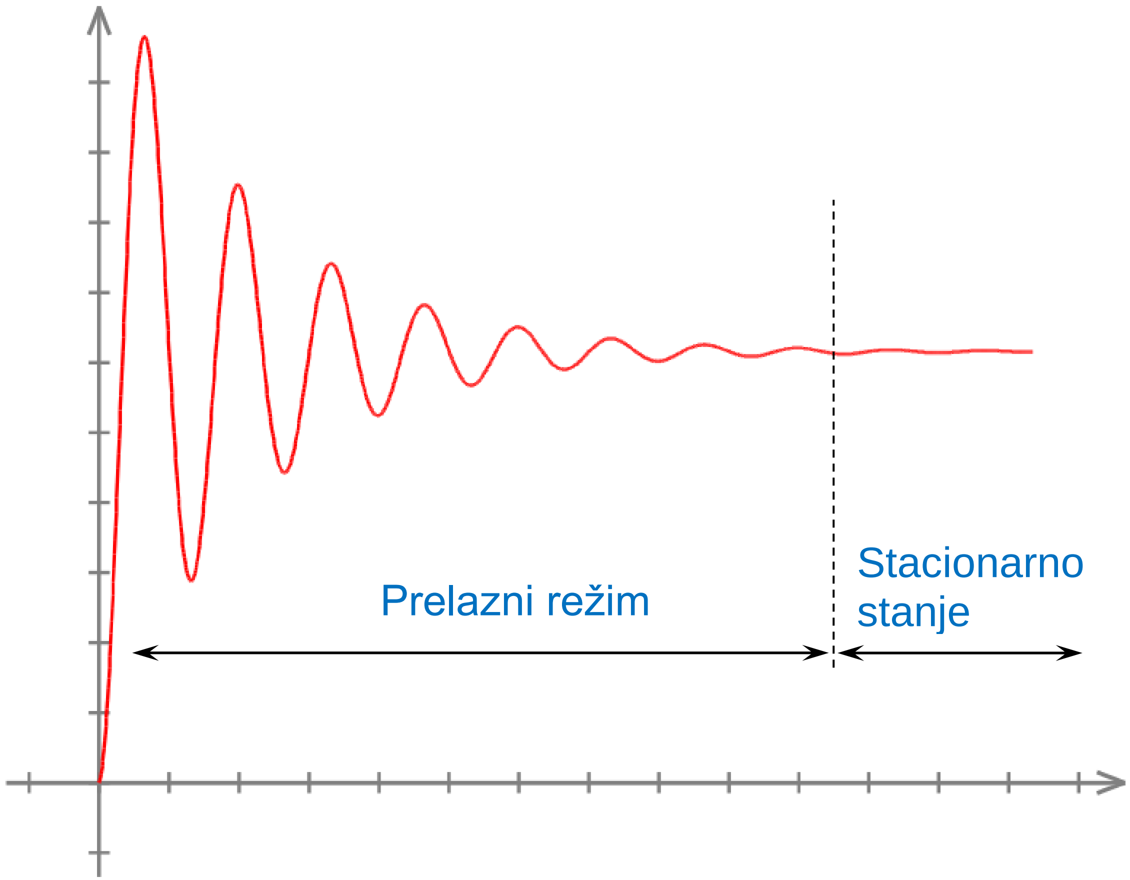
Stacionarno stanje

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

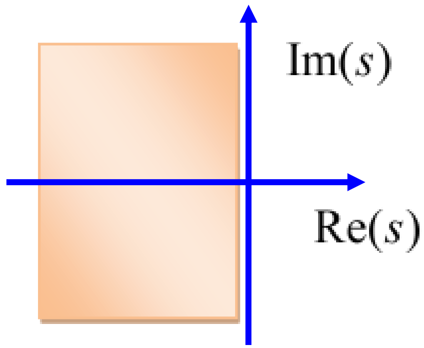
Druga granična teorema Laplasove transformacije:

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} \boxed{sX(s)}$$

$sX(s)$ ne sme imati polove u desnoj poluravni i na imaginarnoj osi



polovi



5.1. GREŠKA RADA SISTEMA BEZ POVRATNE SPREGE U STACIONARNOM STANJU

Posmatramo otvoreni sistem.

Greška rada sistema iznosi:

$$E(s) \triangleq R(s) - Y(s) = R(s) - G(s)R(s)$$
$$= \left[1 - G(s)\right] R(s)$$

Greška zavisi od:

1. funkcije prenosa $G(s)$ (tj. strukture i parametara sistema)
2. ulaznog signala $R(s)$

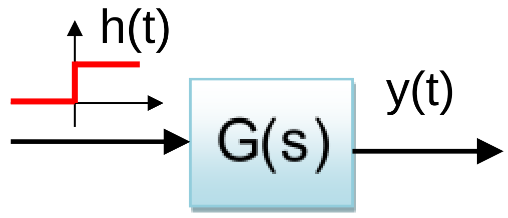
$E(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad e(t) = 0 \ \ \forall t \in \left[0, \infty\right)$ je nemoguće postići u svakom trenutku

Cilj: greška u stacionarnom stanju (statička greška) je nula

$$e_s \triangleq e(\infty) = 0$$

Tipovi statičkih grešaka e_S u odnosu na vrstu pobude

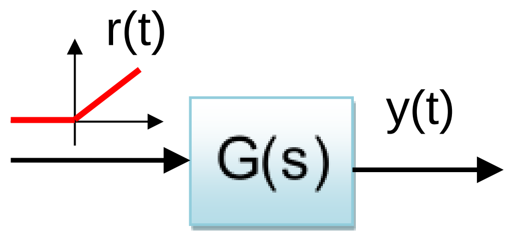
Poziciona statička greška e_{SP}: pobuda h(t)



$$e_{SP} = \lim_{t\to\infty} e_P(t) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{(h(t) - y(t))}_{e_P(t)}$$

$$E_P(s) = \frac{1}{s} - G(s)\frac{1}{s} = (1 - G(s))\frac{1}{s}$$

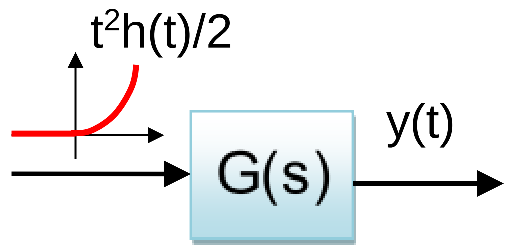
Brzinska statička greška e_{SP}: pobuda r(t) = t h(t)



$$e_{SV} = \lim_{t\to\infty} e_V(t) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{(th(t) - y(t))}_{e_V(t)}$$

$$E_V(s) = \frac{1}{s^2} - G(s)\frac{1}{s^2} = (1 - G(s))\frac{1}{s^2}$$

Statička greška ubrzanja e_{SP}: pobuda t^2 h(t)/2



$$e_{SA} = \lim_{t\to\infty} e_A(t) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{(\frac{1}{2}t^2 h(t) - y(t))}_{e_A(t)}$$

$$E_A(s) = \frac{1}{s^3} - G(s)\frac{1}{s^3} = (1 - G(s))\frac{1}{s^3}$$

Određivanje pozicione statičke greške e_{SP}

Uslov: $G(s)$ ima polove striktno u levoj poluravni (važi II gr. teorema Laplasa).

Greška:

$$\begin{aligned} e_{SP} &= \lim_{t\to\infty} e_P(t) = \lim_{s\to 0} sE_P(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s} - G(s)\frac{1}{s}\right) \\ &= 1 - \lim_{s\to 0} G(s) \\ &= 1 - G(0) \\ &= 1 - K_P \end{aligned}$$

$$K_P = 1 \quad \Rightarrow \quad e_{SP} = 0$$

$$K_P \neq 1 \quad \Rightarrow \quad e_{SP} \neq 0$$

$$G(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad e_{SP} = 0$$

$K_P = G(0)$ - pozicione pojačanje sistema

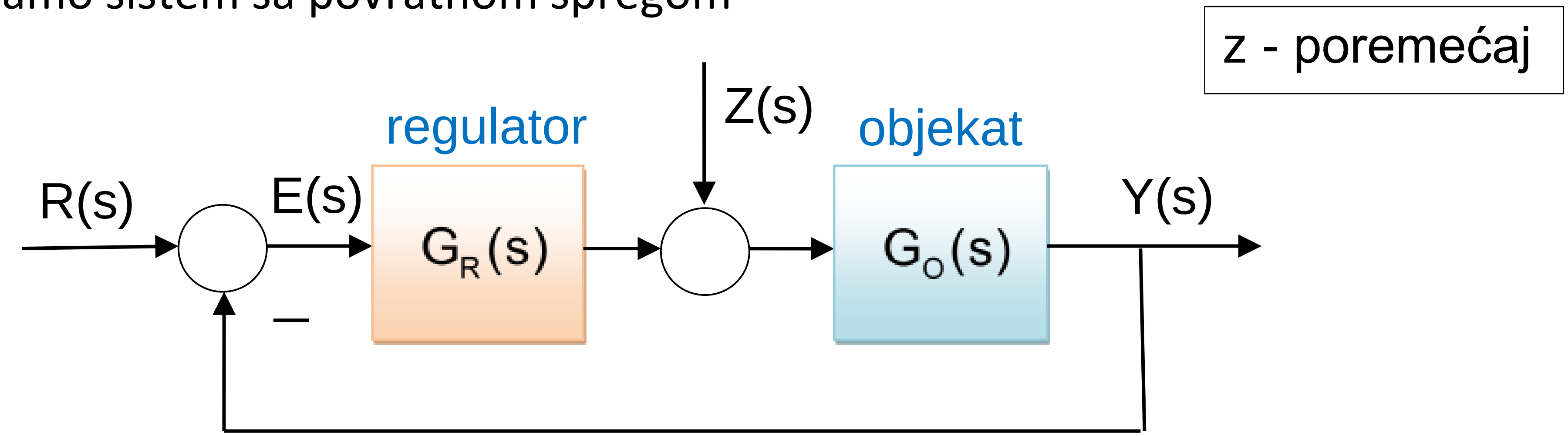
$G(0) = 1$ može se postići određenom kalibracijom sistema.

$G(0) = 1$ je veoma teško održati u slučaju kada:

- na sistem deliju različiti poremećaji ili
- se menjaju parametri i/ili struktura sistema

5.2. KARAKTERIZACIJA SISTEMA U ZATVORENOJ POVRATNOJ SPREZI U STACIONARNOM STANJU

Posmatramo sistem sa povratnom spregom



$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G_O(s)\left[Z(s) + G_R(s)E(s)\right]$$

$$E(s)\left[1 + G_O(s)G_R(s)\right] = R(s) - G_O(s)Z(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) + \frac{-G_O(s)}{1+G(s)}Z(s) \quad , \qquad E(s) = E^R(s) + E^Z(s)$$

$E^R(s)$ - greška usled pobude, $E^Z(s)$ - greška usled poremećaja

$G(s) = G_O(s)G_R(s)$ - funkcija povratnog prenosa

FAKTOR POJAČANJA i RED ASTATIZMA objekta, regulatora i funkcije povratnog prenosa

OBJEKAT: $G_O(s) = K_O \dfrac{P_O(s)}{s^{r_O} Q_O(s)}$

$P_O(0) = Q_O(0) = 1$

K_O - faktor pojačanja objekta

r_O - red astatizma objekta

REGULATOR: $G_R(s) = K_R \dfrac{P_R(s)}{s^{r_R} Q_R(s)}$,

$P_R(0) = Q_R(0) = 1$

K_R - faktor pojačanja regulatora

r_R - red astatizma regulatora

POVRATNI PRENOS: $G(s) = G_O(s) G_R(s) = K_O K_R \dfrac{P_O(s) P_R(s)}{s^{r_O + r_R} Q_O(s) Q_R(s)} = K \dfrac{P(s)}{s^r Q(s)}$

$P(0) = P_O(0) P_R(0) = 1 \cdot 1 = 1$

$Q(0) = Q_O(0) Q_R(0) = 1 \cdot 1 = 1$

$K = K_O K_R$ - faktor pojačanja funkcije povratnog prenosa

$r = r_0 + r_R$ - red astatizma funkcije povratnog prenosa

Primer:

$$G(s)=\frac{s^2+2s+3}{s^2\left(s^4+3s^2+4\right)}=\frac{3\left(\frac{1}{3}s^2+\frac{2}{3}s+1\right)}{4s^2\left(\frac{1}{4}s^4+\frac{3}{4}s^2+1\right)}$$

$$=\frac{3}{4}\,\frac{\frac{1}{3}s^2+\frac{2}{3}s+1}{s^2\left(\frac{1}{4}s^4+\frac{3}{4}s^2+1\right)}$$

$$=\frac{3}{4}\,\frac{P(s)}{s^2Q(s)}$$

$$P(s)=\frac{1}{3}s^2+\frac{2}{3}s+1,\quad P(0)=1,$$

$$Q(s)=\frac{1}{4}s^4+\frac{3}{4}s^2+1,\quad Q(0)=1,$$

$K=3/4,$ faktor pojačanja

$r=2,$ red astatizma

5.2.1. GREŠKA SISTEMA U ZATVORENOJ POVRATNOJ SPREZI U STACIONOM STANJU

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) + \frac{-G_O(s)}{1+G(s)} Z(s), \quad E(s) = E^R(s) + E^Z(s)$$

Ukoliko su ispunjeni uslovi važenja II granične teoreme Laplasa za grešku u stacionarnom stanju važi:

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(E^R(s) + E^Z(s)\right)$$

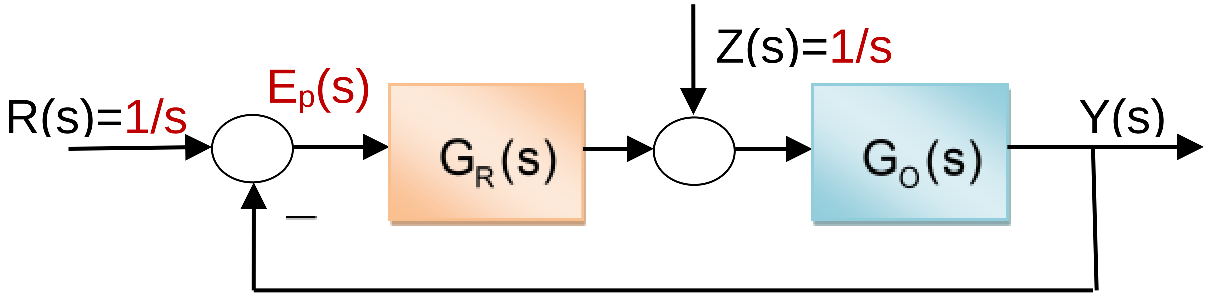
$$= \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)} R(s) + \lim_{s\to 0} s \frac{-G_O}{1+G} Z(s)$$

$$= e_S^R + e_S^Z$$

Greška u stacionom stanju (statička greška) zavisi od:

1. funkcije prenosa objekta G_O i funkcije povratnog prenosa $G = G_O G_R$
2. ulaznog signala $R(s)$ i poremećaja $Z(s)$

POZICIONA STATIČKA GREŠKA



Ulaz: $r(t)=h(t)\Rightarrow R(s)=\dfrac{1}{s}$

Poremećaj: $z(t)=h(t)\Rightarrow Z(s)=\dfrac{1}{s}$

$$e_P(\infty)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\,\frac{1}{1+G(s)}\,\frac{1}{\cancel{s}}+\lim_{s\to 0}\cancel{s}\,\frac{-G_O(s)}{1+G}\,\frac{1}{\cancel{s}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}+\frac{-\lim\limits_{s\to 0}G_O(s)}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}$$

$$=\frac{1}{1+K_P}+\frac{-K_{OP}}{1+K_P}=e_{SP}^{R}+e_{SP}^{Z}$$

$K_P=\lim\limits_{s\to 0}G(s)$ - konstanta položaja (poziciono pojačanje) funkcije povratnog prenosa

$K_{OP}=\lim\limits_{s\to 0}G_O(s)$ - konstanta položaja (poziciono pojačanje) funkcije prenosa objekta

Poziciona statička greška zavisi od dve konstante položaja K_P i K_{OP}.

POZICIONA STATIČKA GREŠKA USLED REFERENCE e_{SP}^R

$$e_{SP}^R = 1/(1+K_P) \qquad K_P = \lim_{s\to 0} G(s)$$

$$K_P = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} K \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{1}{s^r} = K \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^r}$$

$$= \begin{cases} K = K_O K_R, & r = r_O + r_R = 0 \\ \infty, & r = r_O + r_R > 0, \ \forall K \end{cases}$$

$$G(s) = G_O(s) G_R(s)$$

$$= K_0 K_R \frac{P_O(s) P_R(s)}{s^{r_O + r_R} Q_O(s) Q_R(s)} = K \frac{P(s)}{s^r Q(s)}$$

$$P(0) = P_O(0) P_R(0) = 1$$

$$Q(0) = Q_O(0) Q_R(0) = 1$$

$$K = K_O K_R, \quad r = r_O + r_R$$

$$\boxed{e_{SP}^R = \begin{cases} \dfrac{1}{1+K_O K_R}, & r = r_O + r_R = 0 \\ 0, & r = r_O + r_R > 0 \end{cases}}$$

Za $r_O + r_R = 0 \ \Rightarrow \ e_{SP}^R = \dfrac{1}{1+K_O K_R} \neq 0$

- greška je konačna i različita od nule
- greška zavisi od K_O i K_R (obrnuto srazmerno)

Za $r = r_O + r_R > 0 \ \Rightarrow \ e_{SP}^R = 0$

- greška je jednaka nuli
- greška ne zavisi od K_O i K_R

POZICIONA STATIČKA GREŠKA USLED POREMEĆAJA

$$e_{SP}^{Z} = -K_{OP} / (1 + K_P)$$

$$G_O(s) = K_O \frac{P_O(s)}{s^{r_O} Q_O(s)}$$

$$P_O(0) = Q_O(0) = 1$$

$$K_{OP} = \lim_{s \to 0} G_O(s)$$

$$K_P = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$K_{OP} = \lim_{s \to 0} G_0(s) = \lim_{s \to 0} K_O \frac{P_O(s)}{Q_O(s)} \frac{1}{s^{r_0}} = \lim_{s \to 0} K_O \frac{1}{1} \frac{1}{s^{r_O}} = K_0 \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^{r_O}} = \begin{cases} K_O, & r_O = 0 \\ \infty, & r_O > 0 \end{cases}$$

$$K_P = \lim_{s \to 0} G(s) = \begin{cases} K = K_O K_R, & r = r_O + r_R = 0 \\ \infty, & r = r_O + r_R > 0, \ \forall K \end{cases}$$

(već je izvedeno)

$$e_{SP}^{Z} = -\lim_{s\to 0}\frac{G_O(s)}{1+G(s)} = -\lim_{s\to 0}\frac{K_O\dfrac{P_O(s)}{s^{r_O}Q_O(s)}}{1+K\dfrac{P(s)}{s^r Q(s)}} = -\lim_{s\to 0}\frac{K_O P_O(s)Q(s)}{Q_O(s)\left(s^r Q(s)+KP(s)\right)}s^{r-r_O}$$

$$= -\lim_{s\to 0}\frac{K_O}{K}s^{r-r_O} = -\frac{K_O}{K_O K_R}\lim_{s\to 0}s^{r_O+r_R-r_O} = -\frac{1}{K_R}\lim_{s\to 0}s^{r_R}$$

$$\boxed{e_{SP}^{Z} = \begin{cases} -\dfrac{1}{K_R}, & r_R = 0 \\ 0\quad, & r_R > 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P_O(0) = Q_O(0) = 1 \\ &P(0) = P_O(0)P_R(0) = 1 \\ &Q(0) = Q_O(0)Q_R(0) = 1 \\ &K = K_O K_R, \quad r = r_O + r_R \end{aligned}}$$

Slučaj $r_R = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{SP}^{Z} = -1/K_R$

- greška je konačna i različita od nule
- greška zavisi od K_R (obrnuto srazmerno)

Slučaj $r_R > 0 \quad \Rightarrow \quad e_{SP}^{Z} = 0$

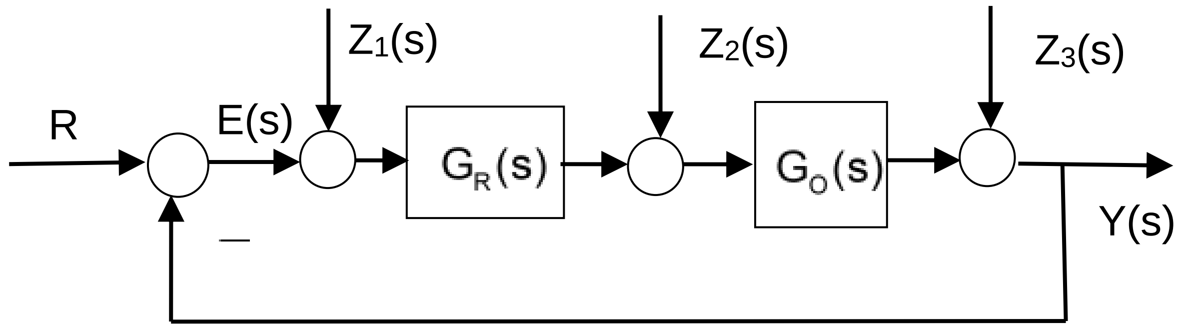
- greška je jednaka nuli
- greška ne zavisi od K_O i K_R

ZAVISNOST STATIČKE GREŠKE OD POZICIJE DEJSTVA POREMEĆAJA

Posmatramo sistem na koga deluju tri poremećaja $Z_1(s),\ Z_2(s)$ i $Z_3(s)$.

Poremećaji deluju na tri pozicije:

- ispred regulatora (Z_1)
- između regulatora i objekta (Z_2)
- iza objekta (Z_3)



Greška usled dejstva ovih poremećaja iznosi:

$$E^Z(s) = \underbrace{\left(-\frac{G(s)}{1+G(s)}Z_1(s)\right)}_{E^{Z_1}(s)} + \underbrace{\left(-\frac{G_O(s)}{1+G(s)}Z_2(s)\right)}_{E^{Z_2}(s)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{1+G(s)}Z_3(s)\right)}_{E^{Z_3}(s)}$$

Poziciona statička greška usled dejstva ovih poremećaja iznosi

$$
\begin{aligned}
e_{SP}^{Z}(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE_P^{Z}(s) \\
&= \lim_{s\to 0} sE_P^{Z_1}(s) + \lim_{s\to 0} sE_P^{Z_2}(s) + \lim_{s\to 0} sE_P^{Z_3}(s) \\
&= -\lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{1+G(s)}\frac{1}{s} - \lim_{s\to 0} s\frac{G_O(s)}{1+G(s)}\frac{1}{s} - \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s} \\
&= -\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{1+G(s)} - \lim_{s\to 0}\frac{G_O(s)}{1+G(s)} - \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)} \\
&= \underbrace{\left(-\frac{\lim\limits_{s\to 0} G(s)}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)}\right)}_{e_{SP}^{Z1}(\infty)} + \underbrace{\left(-\frac{\lim\limits_{s\to 0} G_O(s)}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)}\right)}_{e_{SP}^{Z2}(\infty)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)}\right)}_{e_{SP}^{Z3}(\infty)} \\
&= e_{SP}^{Z_1}(\infty) + e_{SP}^{Z_2}(\infty) + e_{SP}^{Z_3}(\infty)
\end{aligned}
$$

Statička greška usled poremećaja Z_1 koji deluje u tački ISPRED REGULATORA:

$$e_{SP}^{Z_1}(\infty) = -\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{1+G(s)} = -\frac{K\dfrac{P(s)}{Q(s)}\dfrac{1}{s^r}}{1+K\dfrac{P(s)}{Q(s)}\dfrac{1}{s^r}} = -\lim_{s\to 0}\frac{K\dfrac{1}{s^r}}{1+K\dfrac{1}{s^r}} = -\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^r+K} = -1 \neq 0,\quad \forall r$$

konstantna greška

Statičke greške usled poremećaja Z_2 i Z_3 koji deluju u tačkama iza regulatora:

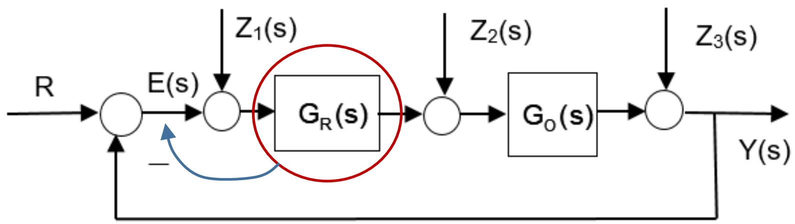
$$e_{SP}^{Z_2}(\infty) = -\lim_{s\to 0}\frac{G_O(s)}{1+G(s)} = -\frac{1}{K_R}\lim_{s\to 0}s^{r_R} = 0,\quad \text{za } r_R > 0$$
(ranije određen lim)

$$e_{SP}^{Z_3}(\infty) = -\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+K\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{s^r}} = 0,\quad \text{za } r = r_O + r_R > 0$$
(ranije određen lim)

Ukupna statička greška usled dejstva svih poremećaja:

$$e_{SP}^{Z}(\infty) = -1-0-0 = -1 \neq 0,$$

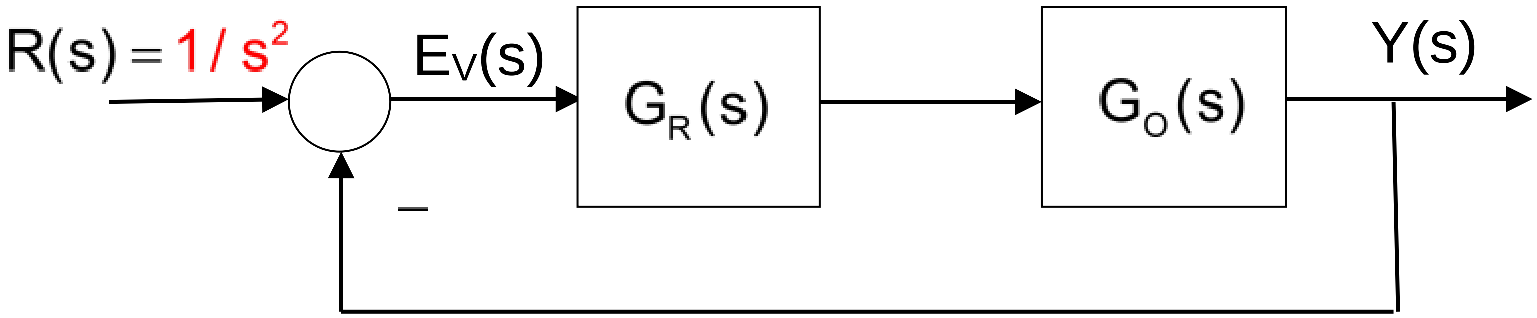
$r_R > 0$ - zajednički uslov za sve tri greške



Zaključak. Da bi statička greška bila jednaka nuli $\left(e_{SP}^{Z}(\infty)=0\right)$, regulator sa pozitivnim redom astatizma $\left(r_R > 0\right)$ treba postaviti ispred mesta dejstva svih poremećaja.
Na taj način se neće javiti konstantna greška (-1) zbog poremećaja koji deluje ispred regulatora.

5.2.2. BRZINSKA STATIČKA GREŠKA USLED REFERENCE

Ulaz: $r(t) = th(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$ Poremećaj: ne posmatramo



Brzinska statička greška:

$$e_v(\infty) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = \frac{1}{K_V} = e_{SV}^R$$

$K_V = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)$ - brzinska konstanta (brzinsko pojačanje)

funkcije povratnog prenosa

Brzinska statička greška zavisi od jedne K_V.

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KP(0)}{Q(0)} \frac{1}{s^{r-1}} = \begin{cases} 0, & r = r_O + r_R = 0 \\ K = K_O K_R, & r = r_O + r_R = 1 \\ \infty, & r = r_O + r_R > 1, \quad \forall K \end{cases}$$

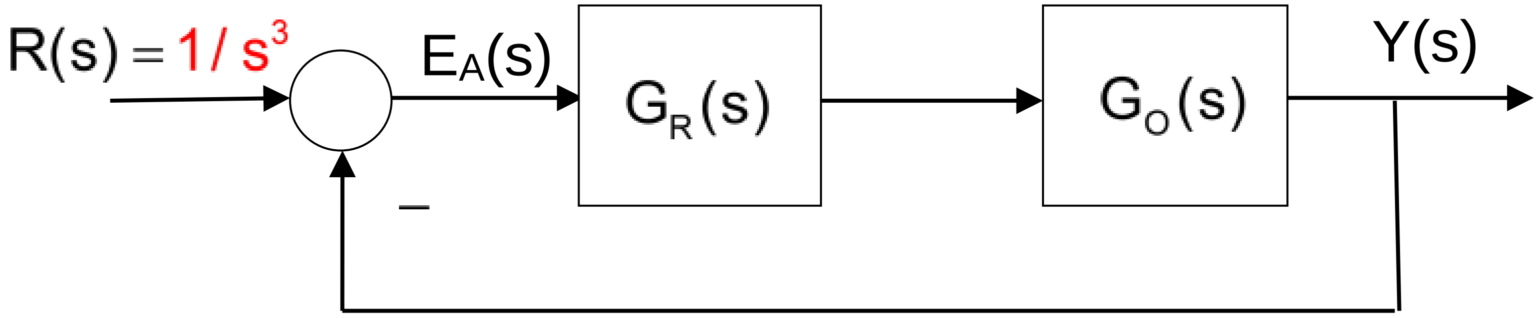
Brzinska statička greška:

$$\boxed{e_{SP}^{R} = \frac{1}{K_V} = \begin{cases} \infty, & r = r_O + r_R = 0 \\ \dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{K_O K_R}, & r = r_O + r_R = 1 \\ 0, & r = r_O + r_R > 1, \ \forall K \end{cases}}$$

5.2.3. STATIČKA GREŠKA UBRZANJA USLED REFERENCE

Ulaz: $r(t) = \frac{1}{2} t^2 h(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3}$

Poremećaj: ne posmatramo



Statička greška ubrzanja:

$$e_A(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{K_A} = e_{SA}^R$$

$K_A = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$ - Konstanta ubrzanja (pojačanje ubrzanja) funkcije povratnog prenosa

Brzinska statička greška zavisi od jedne K_A.

$$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KP(0)}{Q(0)} \frac{1}{s^{r-2}} = \begin{cases} 0, & r = r_O + r_R = 0;1 \\ K = K_O K_R, & r = r_O + r_R = 2 \\ \infty, & r = r_O + r_R > 2 \end{cases}$$

Statička greška ubrzanja:

$$\boxed{e_{SP}^{R} = \frac{1}{K_A} = \begin{cases} \infty, & r = r_O + r_R = 0;1 \\ \dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{K_O K_R}, & r = r_O + r_R = 2 \\ 0, & r = r_O + r_R > 2 \end{cases}}$$

GREŠKA U STACIONARNOM STANJU SISTEMA SA POVRATNOM SPREGOM U FUNKCIJI POBUDE I REDA ASTATIZMA

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4">referenca</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$h(t)$</td><td>$th(t)$</td><td>$\frac{1}{2}t^2h(t)$</td><td>$\cdots$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">astatizam reda r</td><td>$r = r_O + r_R = 0$</td><td>$e_{SP}^R = \frac{1}{1+K_P}$</td><td>$e_{SV}^R = \infty$</td><td rowspan="2">$e_{SA}^R = \infty$</td><td rowspan="3">$e_{S\dots}^R = \infty$</td></tr>
<tr><td>$r = r_O + r_R = 1$</td><td rowspan="3">$e_{SP}^R = 0$</td><td>$e_{SV}^R = \frac{1}{K_V}$</td></tr>
<tr><td>$r = r_O + r_R = 2$</td><td rowspan="2">$e_{SV}^R = 0$</td><td>$e_{SA}^R = \frac{1}{K_A}$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$e_{SA}^R = 0$</td><td>$\dots$</td></tr>
</table>

Primer 5.1. Dat je objekat svojom funkcijom prenosa: $G_O(s) = \dfrac{K_O}{T_O s + 1}$.

A. Odrediti pozicionu statičku grešku usled reference $(e_{SP}^{R} = ?)$ za:

a) sistem bez povratne sprege za $K_O = 1$ i $K_O \neq 1$,

b) sistem sa jediničnom negativnom povratnom spregom sa $G_R(s) = 1$ i $K_0 = 100$,

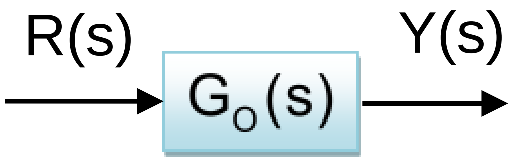
c) sistem sa jediničnom negativnom povratnom spregom sa $G_R(s) = 1/s$ (integralno dejstvo),

B. Ako se pojačanje objekta K_O smanji za 10% u odnosu na zadate vrednosti iz tačke A, odrediti nove vrednosti pozicionih statičkih grešaka iz A.a), A.b) i A.c).

REŠENJE. A. Poziciona statička greška usled reference

a) Sistem bez povratne sprege:

$$e_{SP}^{R} = 1 - G_O(0) = 1 - K_P = 1 - K_O$$



Usvojimo $K_O = 1$ (kalibracija) $\Rightarrow$ $e_{SP}^{R} = 0$

Greška je jednaka nuli.

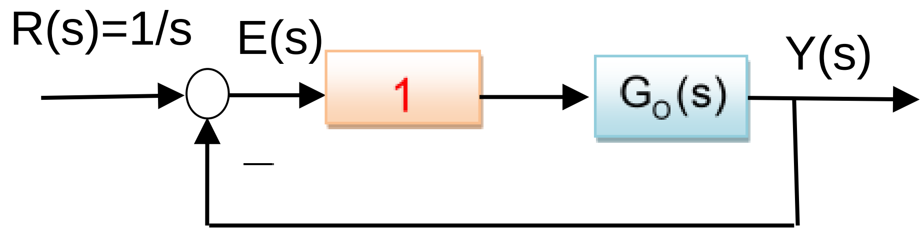
Problem. Uslov $K_O = 1$ je nemoguće održati jer tokom rada sistema dolazi do promene njegovih karakteristika pa važi $K_O \neq 1$.

b) Sistem sa povratnom spregom sa $G_R(s)=1$

$$K_P=\lim_{s\to 0}G(s)=\lim_{s\to 0}G_r(s)G_O(s)=\lim_{s\to 0}1\cdot\frac{K_O}{1\left(T_O s+1\right)}=K_O\ ,\quad r=0$$

s^0

$$\Rightarrow\quad e_{SP}^R=\frac{1}{1+K_P}=\frac{1}{1+K_O}$$



$$e_{SP}^R=\begin{cases}\dfrac{1}{1+K_P}, & r=r_O+r_R=0\\ 0 & ,\ r=r_O+r_R>0\end{cases}$$

* Kada $K_O\to\infty$ (teorijski)

$$\Rightarrow\quad e_{SP}^R=\frac{1}{1+\infty}\to 0!$$

* Praktično usvojimo $K_O=100$

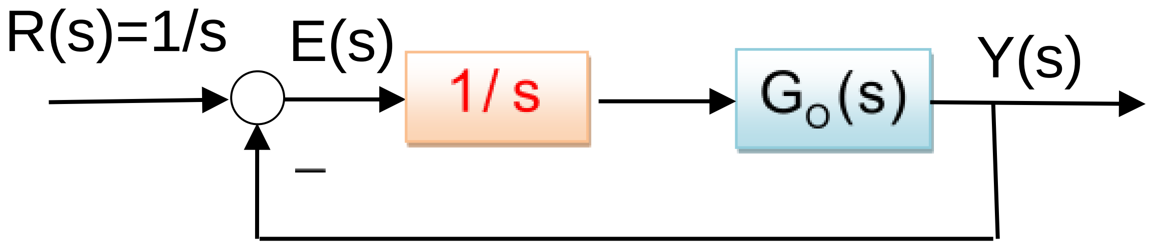
$$\Rightarrow\quad e_{SP}^R=\frac{1}{1+100}=0.0099,\qquad e_{SP}^R\approx 0.01$$

Greška postoji, ali je mala za velike vrednosti pojačanja objekta $K_O=100$.

Razlog: Red astatizma funkcije povratnog prenosa je nula:

$$r=r_O+r_R=0+0=0$$

c) Sistem sa povratnom spregom i $G_R(s) = \frac{1}{s}$



$$K_P = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} G_r(s) G_O(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^1} \frac{K_O}{\left(T_O s + 1\right)} = \infty, \qquad r = 1$$

$$\Rightarrow \quad e_{SP}^{R} = \frac{1}{1+K_P} = \frac{1}{1+\infty} \to 0$$

$$e_{SP}^{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+K_P}, & r = r_O + r_R = 0 \\ 0, & r = r_O + r_R > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad e_{SP}^{R} = 0, \quad \forall K_O$$

Greška je jednaka nuli za bilo koju vrednost pojačanja objekta K_O.

Razlog: red astatizma funkcije povratnog prenosa je veći od nule:

$$r = r_O + r_R = 0 + 1 = 1 > 0$$

B. Smanjenje pojačanja objekta K_0 za 10% u odnosu na izabranu vrednost $K_0 = 100$.

a) Sistem bez povratne sprege:

izabrana vrednost $K_O = 1$ $\Rightarrow$ umanjena vrednost $\hat{K}_O = 0.9$

$e_{SP}^R = 1 - 0.9 = 0.1$ $\Rightarrow$ e_{SP}^R se značajno menja sa 0 na 0.1

b) Sistem sa povratom spregom i $G_R(s) = 1$, $(r = 0)$

izabrana vrednost $K_O = 100$ $\Rightarrow$ umanjena vrednost $\hat{K}_O = 90$

$$e_{SP}^R = \frac{1}{1+\hat{K}_O} = \frac{1}{1+90} = \frac{1}{91}, \quad e_{SP}^R \approx 0.011$$

$\Rightarrow$ e_{SP}^R se neznatno menja sa 0.01 na 0.011

c) Za sistem sa povratnom spregom i $G_R(s) = 1/s$ $(r = 1)$

$$K_P = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{K_O}{s(T_O S + 1)} = \infty \Rightarrow e_{SP}^R = \frac{1}{K_P} = 0, \ \forall K_O$$

$\Rightarrow$ e_{SP}^R se ne menja (ostaje jednaka nuli)

ZAKLJUČAK: Kod sistema sa povratnom spregom čiji je red astatizma funkcije povratnog prenosa veći od 0, poziciona statička greška usled reference je uvek nula bez obzira na promene pojačanja K_O i vremenske konstante T_O objekta.

5.3. OČITAVANJE KONSTANTI GREŠKE SA BODEOVIH DIJAGRAMA

$K_P = \lim_{s\to 0} G(s)$ konstanta položaja

$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s)$ brzinska konstanta

$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$ konstanta ubrzanja

$$G(s) = G_O(s)G_R(s) = K\frac{P(s)}{s^r Q(s)}$$

Vrednosti konstanti K_P, K_V i K_A za različite vrednosti reda astatizma r:

r	$K_P = \lim_{s\to 0} G(s)$	$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s)$	$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$
0	K	0	0
1	∞	K	0
2	∞	∞	K

Konstante K_P, K_V i K_A imaju konačnu vrednost K različitu od nule za:

$r=0$	$K_P = \lim_{s\to 0} G(s) = K$
$r=1$	$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = K$
$r=2$	$K_A = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = K$

Za $s = j\omega$

$$G(j\omega) = K\frac{P(j\omega)}{(j\omega)^r Q(j\omega)}$$

Konstante K_P, K_V i K_A imaju konačnu vrednost K različitu od nule za:

$r=0$	$K_P = \lim_{\omega\to 0} G(j\omega) = K$
$r=1$	$K_V = \lim_{\omega\to 0} (j\omega)G(j\omega) = K$
$r=2$	$K_A = \lim_{\omega\to 0} (j\omega)^2 G(j\omega) = K$

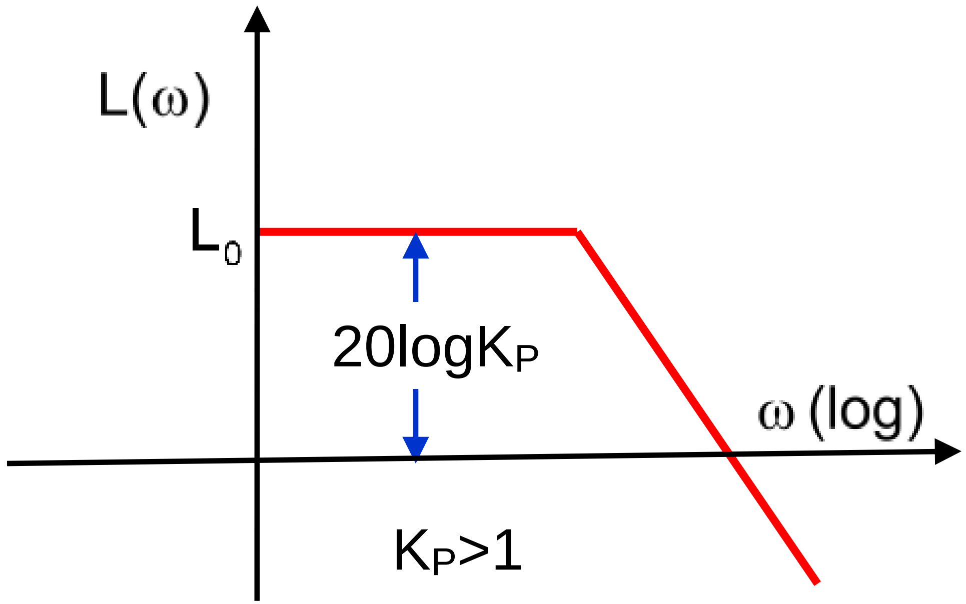
5.3.1. KONSTANTA POLOŽAJA K_P

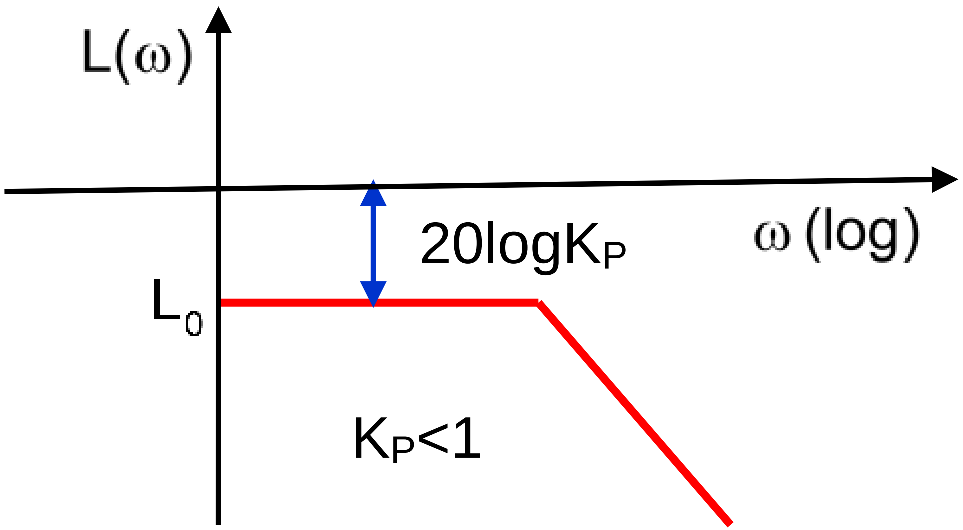
Ako je red astatizma r = 0

$$\text{za } \omega \to 0, \quad K_P = \lim_{\omega\to 0} G(j\omega) = \lim_{\omega\to 0} K \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = K$$

Početni segment (za $\omega \approx 0$) amplitudne karakteristike sistema bez astatizma ($r = 0$) je horizontalni:

$$L(\omega) \approx 20\log\left| K_P \frac{P(j0)}{Q(j0)} \right| = 20\log K_P = \begin{cases} L_0 > 0, \; K_P > 1 \\ L_0 = 0, \; K_P = 1 \\ L_0 < 0, \; K_P < 1 \end{cases}$$





5.3.2. BRZINSKA KONSTANTA K_V

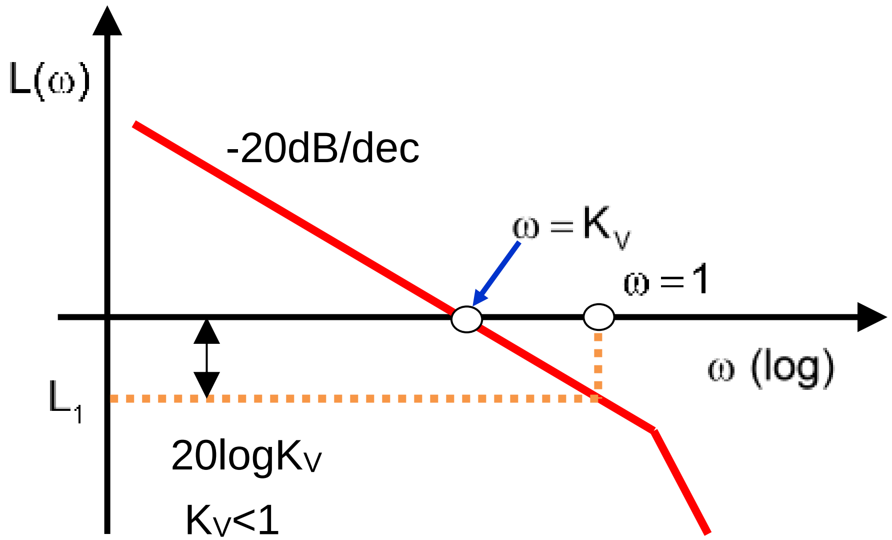
Ako je astatizam r = 1

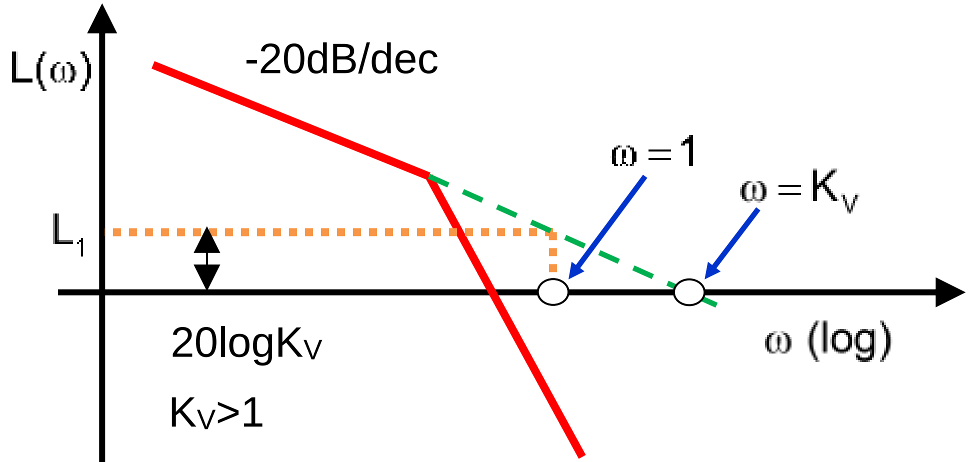
$$\text{za } \omega \to 0, \quad K_V = \lim_{\omega\to 0}(j\omega)G(j\omega) = \lim_{\omega\to 0}(j\omega)\frac{KP(j\omega)}{j\omega Q(j\omega)} = K$$

Početni segment (za $\omega \approx 0$) amplitudne karakteristike sistema sa astatizmom prvog reda ($r = 1$) ima nagib od $-20db/dec$:

$$L(\omega) \approx 20\log\left|K_V / j\omega\right| = 20\log K_V - 20\log\omega$$

Za $L(\omega) \approx 20logK_V - 20log\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_V = \omega}; \quad \boxed{\omega = 1 \Rightarrow 20logK_V = L_1}$





Ako je red astatizma r = 2

za $\omega \to 0,\qquad K_A = \lim_{\omega\to 0}(j\omega)^2 G(j\omega) = \lim_{\omega\to 0}(j\omega)^2 \dfrac{KP(j\omega)}{(j\omega)^2 Q(j\omega)} = K$

Početni segment (za $\omega \approx 0$) amplitudne karakteristike sistema sa astatizmom drugog reda ($r=2$) ima nagib od $-40db/dec$:

$$L(\omega) \approx 20\log\left|K_A/(j\omega)^2\right| = 20\log K_A - 40\log\omega$$

Za $20logK - 40log\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_A = \omega^2};\quad \boxed{\omega = 1 \Rightarrow 20logK_A = L_2}$