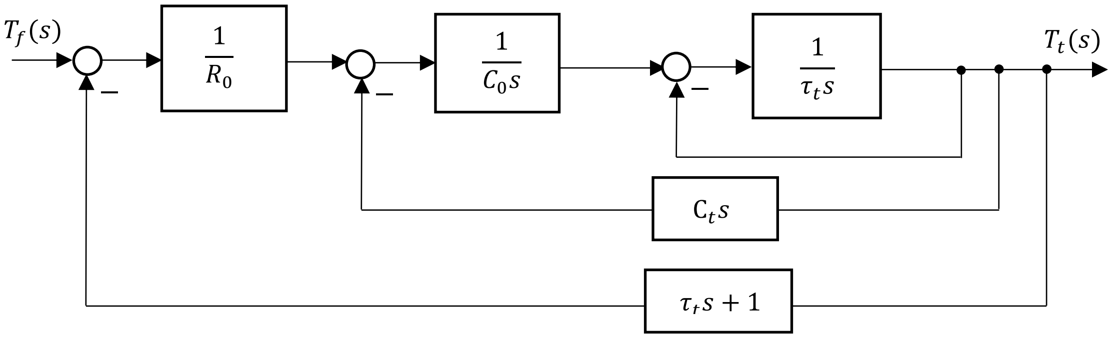
Анализа система у временском и комплексном (Лапласовом) домену

На слици је дат блок дијаграм процеса мерења температуре помоћу термометра са заштитном облогом. Параметри термометра су следећи: површина облоге - $A_0 = 200\ cm^2$; коефицијент прелаза топлоте између околног флуида и облоге - $\mathrm{h}_0 = 200\ W/m^2K$; површина термометра -$A_t = 100\ cm^2$; коефицијент преноса топлоте између облоге и термометра - $\mathrm{h}_t = 225\ W/m^2K$; топлотна капавитивност облоге је - $C_0 = 1\ J/K$; док је топлотна капацитивност термометра C_t =2,25 J/K временска константа термометра - $\tau = RC$; топлотни отпор - $R = 1/Ah$. Улазна величина (побуда) је температура флуида T_f, а излазна (одзив) T_t.



а) Проверити да ли је преносна функција овог процеса

$$W(s) = \frac{T_t(s)}{T_f(s)} = \frac{1}{(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)}$$

б) На основу преносне функције, применом Лапласове трансформације одредити једначину понашања овог процеса.

в) Одредити одзив система при побуди $T_f(t) = 293h(t)\ [K]$. Одредити температуру коју ће показивати термометар након 50 секунди.

г) Наћи статичку грешку система, при истој побуди као у тачки в) задатка.

<u>Решење</u>:

$$A_0 = 200\ cm^2 = 0{,}02\ m^2$$

$$\mathrm{h}_0 = 200\ W/m^2K$$

$$A_t = 100\ cm^2 = 0{,}01\ m^2$$

$$\mathrm{h}_t = 225\ W/m^2K$$

$$C_0 = 1\ J/K$$

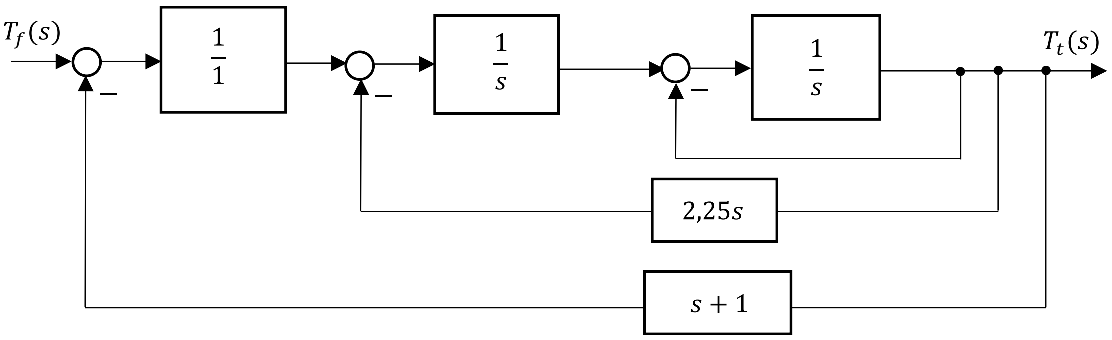
$$C_t = 2{,}25\ J/K$$

$$R_0 = \frac{1}{A_0 h_0} = \frac{1}{0{,}02 \cdot 200} = 1\ \frac{K}{W}$$

$$R_t = \frac{1}{A_t h_t} = \frac{1}{0{,}01 \cdot 225} = \frac{4}{9}\ \frac{K}{W}$$

$$\tau_t = \mathrm{R}_t \mathrm{C}_t = 1\ s$$

$$\tau_0 = \mathrm{R}_0 \mathrm{C}_0 = 1\ s$$



а)

1. Повратна спрега блока $\frac{1}{2s}$ јединичне негативне повратне спреге

$$\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}=\frac{\frac{1}{s}}{\frac{s}{s}+\frac{1}{s}}=\frac{1}{s+1}$$

2. Затим претходно израчунати блок $\frac{1}{s+1}$ је сада редно везан са блоком $\frac{1}{s}$

$$\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2+s}$$

3. Затим претходно израчунати блок $\frac{1}{s^2+s}$ је у јединичној негативној повратној спреги

$$\frac{\frac{1}{s^2+s}}{1+\frac{2{,}25s}{s^2+s}}=\frac{\frac{1}{s^2+s}}{\frac{s^2+s}{s^2+s}+\frac{2{,}25s}{s^2+s}}=\frac{1}{s^2+3{,}25s}$$

4. Затим претходно израчунати блок $\frac{1}{s^2+3{,}25s}$ је сада једно везан са блоком $\frac{1}{1}$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{s^2+3{,}25s}=\frac{1}{s^2+3{,}25s}$$

5. И на крају имамо повратну спрегу са директном граном

$$\frac{\frac{1}{s^2+3{,}25s}}{1+\frac{s+1}{s^2+3{,}25s}}=\frac{\frac{1}{s^2+3{,}25s}}{\frac{s^2+3{,}25s}{s^2+3{,}25s}+\frac{s+1}{s^2+3{,}25s}}=\frac{1}{s^2+4{,}25s+1}=\frac{1}{(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)}$$

б) Полазећи од једначине

$$W(s)=\frac{T_t(s)}{T_f(s)}=\frac{1}{s^2+4{,}25s+1}$$

добија се следеће:

$$T_f(s)=\left(s^2+4{,}25s+1\right)T_t(s)$$

$$T_f(s)=s^2T_t(s)+4{,}25sT_t(s)+T_t(s)\quad/\mathcal{L}^{-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(T_f(s)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(s^2T_t(s)\right)+4{,}25\mathcal{L}^{-1}\left(sT_t(s)\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(T_t(s)\right)$$

$$T_f(t) = \ddot{T}_t(t) + 4{,}25\dot{T}_t(t) + T_t(t)$$

в) Из једначине

$$\frac{T_t(s)}{T_f(s)} = \frac{1}{(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)}$$

за $T_t(s)$ се добија:

$$T_t(s) = \frac{1}{(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)} T_f(s)$$

Пошто је $T_f(t) = 293h(t)$ следи да је $T_f(s) = \mathcal{L}\big(293h(t)\big) = \frac{293}{s}$. Сада је:

$$T_t(s) = \frac{1}{(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)} \frac{293}{s}$$

$$T_t(s) = \frac{293}{s(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+4)} + \frac{C}{\left(s+\frac{1}{4}\right)} = \frac{A(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right) + Bs\left(s+\frac{1}{4}\right) + Cs(s+4)}{s(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{A(s^2+4{,}25s+1) + Bs^2 + 0{,}25Bs + Cs^2 + 4Cs}{s(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{(A+B+C)s^2 + (4{,}25A + 0{,}25B + 4C)s + A}{s(s+4)\left(s+\frac{1}{4}\right)}$$

$$\begin{array}{lclcl} A+B+C=0 & & B+C=-293 & & B=19{,}53 \\ 4{,}25A+0{,}25B+4C=0 & \Longrightarrow & 0{,}25B+4C=-1245{,}25 & \Longrightarrow & C=-312{,}53 \\ A=293 & & & & \end{array}$$

Сада се добија:

$$T_t(s) = \frac{293}{s} + \frac{19{,}53}{(s+4)} + \frac{-312{,}53}{\left(s+\frac{1}{4}\right)}$$

$$T_t(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(T_t(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{293}{s} + \frac{19{,}53}{(s+4)} + \frac{-312{,}53}{\left(s+\frac{1}{4}\right)}\right)$$

$$= 293\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 19{,}53\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+4)}\right) - 312{,}53\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)}\right)$$

$$T_t(t) = \left(293 + 19{,}53e^{-4t} - 312{,}53e^{-\frac{t}{4}}\right)h(t)$$

$$T_t(t=50\ s) = \left(293 + 19{,}53e^{-4\cdot 50} - 312{,}53e^{-\frac{50}{4}}\right) \approx 293{,}0011\ K$$

д) Статичка грешка система је:

$$e(t) = T_f(t) - T_t(t)$$

У Лапласовом домену за статичку грешку се добија:

$$e(s) = T_f(s) - T_t(s) = T_f(s) - T_f(s)W(s) = T_f(s)\big(1 - W(s)\big)$$

$$e(s) = \frac{293}{s}\left(1 - \frac{1}{s^2 + 4{,}25s + 1}\right) = \frac{293}{s} \cdot \frac{s^2 + 4{,}25s}{s^2 + 4{,}25s + 1}$$

Из друге граничне теореме Лапласа се добија:

$$e(t \to \infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot e(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{293}{s} \cdot \frac{s^2 + 4{,}25s}{s^2 + 4{,}25s + 1} = 0$$

У стационарном стању не постоји статичка грешка.